

Università degli Studi di Padova

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
“Galileo Galilei”



Tesi di Laurea Triennale in Astronomia

ORBITE KEPLERIANE E APPLICAZIONI

Relatore:

Prof. Marco Favretti

Candidato:

Agnese Ghetti

Anno Accademico 2014-2015

Abstract *La tesi si pone come obiettivo lo studio del problema dei due corpi. In particolare, si ricaveranno le leggi di Keplero e si descriveranno le orbite kepleriane. Si discuteranno, inoltre, alcune applicazioni astronomiche nell'ambito delle missioni spaziali, trattando le implicazioni di un possibile lancio verso Nettuno.*

Indice

1	Il problema dei due corpi	9
1.1	Riduzione del problema	9
1.2	Soluzione per la coordinata relativa	10
2	Problema di Keplero	15
2.1	Forma delle orbite	15
2.2	Orbite circolari	16
2.3	Forma del potenziale associato ad un'orbita conica che precede	21
2.4	Il vettore di Laplace-Runge-Lenz	21
2.5	Periodo delle orbite Kepleriane chiuse	23
3	Missioni spaziali	25
3.1	Velocità di fuga	25
3.2	Missione su Nettuno	26
3.3	Trasferimento alla Hohmann	27
3.4	Fionda gravitazionale	30
3.5	Approssimazioni	42
4	Appendice	43

Introduzione

Questo lavoro di tesi si propone di studiare il problema dei due corpi. Tale argomento, rilevante in ambito astronomico, permette di determinare le orbite descritte da oggetti sotto azione di una forza centrale. Il lavoro di tesi si divide in due sezioni principali. La prima parte comprende un'introduzione teorica dei concetti matematici e fisici che entrano in gioco nella trattazione. La seconda, invece, è di carattere applicativo: si descrive una missione spaziale. Nella parte teorica, attraverso l'utilizzo del formalismo lagrangiano, si descrive un generico sistema formato da due corpi che interagiscono mutualmente attraverso una forza centrale. Il problema della determinazione delle equazioni del moto dei due corpi è riconducibile allo studio di due equazioni del moto indipendenti, per il centro di massa e per la coordinata relativa. Si dimostra che l'unica coordinata non banale da studiare è la coordinata relativa. Si continua la descrizione del problema, perciò, in termini di questa variabile. Ricavate le formule valide per il moto dovuto a una generica forza centrale, tra le quali anche la costanza delle velocità areolare, (*II Legge di Keplero*), si procede specificando il problema ed esplicitando la forma della forza di attrazione gravitazionale. Si entra, quindi, in ambito astronomico, si tratta del problema di Keplero. Il caso di attrazione gravitazionale tra due corpi è, infatti, il generico caso di attrazione in un sistema pianeta-Sole o sonda-pianeta. Si ricavano le orbite che può descrivere il corpo di massa minore a seconda del valore della sua energia e si pone l'attenzione, in particolare, al caso di orbita ellittica. Dallo studio delle orbite ellittiche, infatti, si ricava la *I Legge di Keplero*.

La tesi propone, inoltre, attraverso lo studio delle proprietà del vettore di Lenz, una descrizione alternativa delle orbite kepleriane. Questo vettore permette di identificare un'ulteriore simmetria del problema dovuta alla presenza di un integrale primo aggiuntivo. Si ricava analiticamente, come conclusione della prima parte teorica, la relazione che intercorre tra il periodo di rivoluzione lungo l'orbita e il relativo semiasse maggiore (*III Legge di Keplero*). La seconda parte del lavoro di tesi applica le equazioni ricavate ad una ipotetica missione verso Nettuno, facendo riferimento, in particolare, alla missione spaziale Voyager 2. Vengono messe a confronto due diverse tipologie di lancio, così da poter calcolare efficienza in termini temporali ed energetici e capire quale modalità di volo viene tipicamente utilizzata. La discussione si è concentrata con particolare attenzione sul metodo di gravitational assist, che risulta più efficiente per lanci verso pianeti esterni del Sistema Solare. Si vuole descrivere, più nel dettaglio, quali tipi di traiettorie deve seguire la sonda per giungere nei pressi di Nettuno. Stabilito, infatti, tramite un calcolo numerico esemplificativo, che il processo di fionda gravitazionale è il più efficiente, si divide la traiettoria della sonda in tre eventi principali:

- Partenza dalla Terra,
- Scattering gravitazionale con Giove
- Arrivo su Nettuno

Si studiano queste tre porzioni di traiettoria non solo nel sistema di riferimento terrestre, ma anche in quello solare. In questo modo è possibile tenere conto degli effetti di composizione della velocità della sonda con le velocità dei pianeti con cui interagisce. Terra e Giove orbitano, infatti, rispetto al Sole con velocità v_{\oplus} e v_J . Di particolare interesse risulta essere l'ultima parte di traiettoria che, in entrambi i sistemi di riferimento, è un'orbita aperta. Questo ha permesso una digressione più approfondita sulle orbite iperboliche, solo accennate

nella prima parte della tesi. Si conclude la tesi presentando alcuni dati relativi alle missioni spaziali. Si specificano, inoltre, le ipotesi sotto cui sono stati condotti i calcoli. Nonostante le assunzioni fatte, le osservazioni riportate valgono, in generale, per calcoli e lavori più specifici.

Capitolo 1

Il problema dei due corpi

1.1 Riduzione del problema

Il problema dei due corpi studia la dinamica di un sistema formato da due oggetti massivi sottoposti a una forza centrale. Si definisce forza centrale una forza che dipenda solo dal modulo della differenza dei vettori posizione dei due oggetti e che sia diretta lungo la congiungente dei due corpi. L'espressione di questo genere di forza è:

$$\mathbf{F} = F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (1.1)$$

Si considerino, in un sistema di riferimento inerziale $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, due oggetti di massa m_1 e m_2 , trattabili come punti materiali, soggetti a una forza centrale. La Fig.(1.1) mostra la configurazione schematica di questo sistema. La lagrangiana del sistema, supponendo che i punti materiali, descritti dai vettori \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , si stiano muovendo con velocità $\dot{\mathbf{r}}_1$ e $\dot{\mathbf{r}}_2$, è definita come:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (1.2)$$

Tale lagrangiana può essere ridotta introducendo le variabili posizione relativa, \mathbf{r} , e posizione

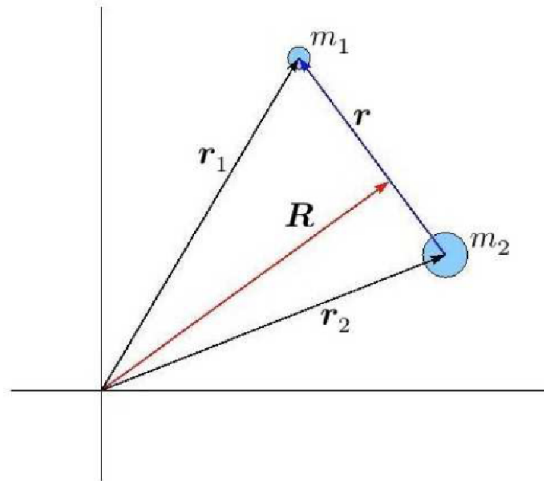


Figura 1.1: Rappresentazione di m_1 e m_2 ,soggette a forza centrale.

del centro di massa, \mathbf{R} . In questo modo è sempre possibile ricondurre il problema generale dei due corpi a due problemi indipendenti attraverso il seguente cambio di variabili:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (1.4)$$

Con questo cambio di variabili le posizioni dei punti materiali possono scriversi come:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (1.6)$$

Sostituendo le espressioni di \mathbf{R} e \mathbf{r} nell'espressione (1.2) si ottiene la nuova forma della lagrangiana, in funzione delle nuove variabili. Essa è:

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 - U(r) \quad (1.7)$$

dove $M = m_1 + m_2$, massa totale, e $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, massa ridotta. La nuova forma in cui è stata scritta la lagrangiana del sistema mette in luce la presenza di un integrale primo. Infatti, essa risulta essere indipendente dalla variabile \mathbf{R} . Questo implica, dalle equazioni di Eulero-Lagrange, che esiste una quantità che rimane costante durante il moto, è la quantità $M\dot{\mathbf{R}}$. Dall'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = 0 \quad (1.8)$$

Essendo nullo il secondo termine a primo membro, $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}$, risulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) = 0 \quad (1.9)$$

da cui :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \text{cost} \quad (1.10)$$

Questa proprietà della lagrangiana implica che l'equazione del moto relativa alla coordinata \mathbf{R} è triviale. Risolvendo, infatti, l'equazione differenziale (1.9) si ottiene che tale coordinata segue una legge lineare del tipo:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \dot{\mathbf{R}}(0)t \quad (1.11)$$

Questo significa che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme. Di maggiore interesse è, invece, lo studio della coordinata relativa, \mathbf{r} .

1.2 Soluzione per la coordinata relativa

La coordinata che determina la descrizione del sistema è, dunque, la coordinata relativa \mathbf{r} . Per questa coordinata vale la seguente relazione, che discende dalla definizione di moto centrale:

$$\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = 0 \quad (1.12)$$

Il vettore posizione e il vettore accelerazione sono quindi paralleli. Da tale proprietà consegue che il moto della coordinata relativa o è rettilineo, come quello della coordinata del centro di massa, o si svolge su un piano perpendicolare al momento angolare, l . Per dimostrare ciò si consideri la definizione di momento angolare, $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}$. Se si deriva, si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l}(t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mu \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \mu \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (1.13)$$

dove l'uguaglianza a zero è conseguenza dalla definizione di moto centrale, (1.12). E' evidente, perciò, che in questo tipo di moto si conserva il momento angolare $l(t) = l(0) = \text{cost}$. Si presentano dunque due possibilità:

- $l(t) = l(0) = 0$
- $l(t) = l(0) \neq 0$

Il primo caso corrisponde al caso di moto rettilineo, il secondo, invece, è il caso di un moto confinato in un piano perpendicolare a $l(t)$. E' conveniente effettuare un cambio di coordinate, in particolare risulta favorevole descrivere il sistema in coordinate polari e non più cartesiane. E' sufficiente, essendo il moto confinato in un piano, utilizzare la terna $(O, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r)$. Le relazioni necessarie per effettuare il cambio di sistema di coordinate sono:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (1.14)$$

Derivando le espressioni di \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_θ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_2 = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_2 = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \end{cases} \quad (1.15)$$

In questo modo è possibile mettere in relazione la terna $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ con la terna $(O, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r)$. Si vuole scrivere l'equazione del moto attraverso questo nuovo sistema di base. Per farlo è necessario considerare la derivata seconda del vettore posizione, $\ddot{\mathbf{r}}$. Dalla definizione di $\mathbf{r}(t)$, si deriva due volte:

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r = r(t) (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \quad (1.16)$$

Derivando una prima volta si ottiene la velocità:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &\equiv \frac{d}{dt} (r(t) \mathbf{e}_r) \\ &= \dot{r} \cos \theta \mathbf{e}_1 - r(t) \sin \theta \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{r} \sin \theta \mathbf{e}_2 + r(t) \cos \theta \dot{\theta} \mathbf{e}_2 \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.17)$$

Dove l'ultima uguaglianza è valida grazie alle equazioni espresse da (1.14). Derivando nuovamente si ottiene l'accelerazione, \mathbf{a}_P :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P &\equiv \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} \\ &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \ddot{\theta} r \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta}^2 r \mathbf{e}_r \\ &= \mathbf{e}_r (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) + \mathbf{e}_\theta (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \\ &= a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.18)$$

E' stato possibile, semplicemente sfruttando la definizione di velocità e di accelerazione, determinare la componente radiale e la componente tangenziale dell'accelerazione:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r \\ a_\theta = 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \end{cases} \quad (1.19)$$

Ciò corrisponde ad avere due equazioni del moto in entrambe le direzioni, θ e r . In questo modo si ottiene, infatti:

$$\mu \mathbf{a}_P = \mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (1.20)$$

Poiché la forza considerata è una forza centrale la componente tangenziale, F_θ , è identicamente nulla. Così si ha:

$$\mu a_\theta \mathbf{e}_\theta = F_\theta = 0 \quad (1.21)$$

L'equazione (1.21) implica che:

$$a_\theta = 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} = 0 \quad (1.22)$$

Moltiplicando entrambi i membri di (1.21) per r :

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (1.23)$$

da cui si definisce la quantità \dot{A} dalla seguente equazione:

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \equiv \dot{A} = cost = \frac{c}{2} \quad (1.24)$$

Il valore della costante è stato indicato con $\frac{c}{2}$ per convenzione. La nuova quantità definita, \dot{A} , rappresenta una velocità areolare, in particolare la superficie sottesa nel tempo dal vettore posizione, $\mathbf{r}(t)$. La formula (2.51) corrisponde alla seconda legge di Keplero: *Il vettore posizione spazza aree uguali in tempi uguali*. La seconda legge di Keplero discende, dunque, dalla semplice assunzione di moto sotto azione di forze centrali e non dipende dal tipo di forza che agisce, non è stata ancora esplicitata, infatti, la forma della forza agente. La conservazione di \dot{A} fornisce informazioni sull'integrale primo già individuato, l , momento angolare. In particolare, è possibile definire il modulo, costante, di l in funzione di \dot{A} . Dalla definizione di momento angolare e sostituendo (1.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(0) &= r \mathbf{e}_r \times \mu (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) \\ &= \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \\ &= \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z \\ &= 2\mu \dot{A} \mathbf{e}_z \\ &= \mu c \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.25)$$

Rimane, perciò, identificato il valore della costante c , introdotta per indicare il valore dell'area \dot{A} . Infatti:

$$c = \frac{l}{\mu} \quad (1.26)$$

In seguito si procederà indicando esplicitamente l'espressione di c , (1.26), in modo da manifestare la dipendenza di l .

Studiata l'equazione del moto in direzione tangenziale, si procede con lo studio dell'equazione in direzione radiale, dove la componente della forza è diversa da zero, $F_r \neq 0$. Per risolvere l'equazione del moto si imposta il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mu(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) = F_r \\ \frac{l}{\mu} = c = r^2 \dot{\theta} \end{cases} \quad (1.27)$$

Risolvendo (1.27), si giunge all'equazione:

$$\mu \ddot{r} = F_r + \frac{l^2}{r^3 \mu} \quad (1.28)$$

La riduzione del problema ha condotto a un'equazione del moto radiale che non contiene, come ci si aspetterebbe, solo la componente radiale della forza, \mathbf{F} , ma presenta un termine aggiuntivo dipendente dal valore della velocità areolare e proporzionale a r^{-3} . Si definisce, allora, un potenziale $U(r)$, che non tenga conto unicamente di F_r , ma che incorpori anche questo nuovo termine. Il nuovo potenziale introdotto è detto potenziale efficace, U_{eff} , poiché comprende tutti i termini che descrivono il moto dell'oggetto. Esso è, per definizione di potenziale:

$$U_{eff} = - \int (F_r + \frac{l^2}{\mu r^3}) dr = U(r) + \frac{l^2}{2r^2 \mu} \quad (1.29)$$

Da questa nuova definizione di potenziale è possibile definire l'energia totale del sistema. Essa sarà la somma del contributo cinetico e di quello di energia potenziale :

$$E(r, \dot{r}) = \mu \frac{\dot{r}^2}{2} + U_{eff} = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r) + \frac{l^2}{2r^2 \mu} \quad (1.30)$$

Dalla espressione scritta è possibile integrare, in linea teorica, l'equazione del moto e ottenere $r(t)$. Questo è dovuto alla presenza di un altro integrale primo del sistema: l'energia. Essendo E costante nel tempo si può scrivere:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{da cui} \quad E = \text{cost} \quad (1.31)$$

Dalla espressione analitica di E , (1.30), si ha:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff})} \quad (1.32)$$

Da questa equazione differenziale, tramite integrazione, si ricava $r(t)$ attraverso l'utilizzo di funzioni ellittiche. Risulta più facile, sia dal punto di vista del calcolo sia dal punto di vista della descrizione del problema, ricavare $r(\theta)$, la forma dell'orbita. Si procede derivando secondo la regola di Leibniz. Per la derivata prima di r si ha:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \quad (1.33)$$

Mentre per la derivata seconda:

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\theta^2} (\dot{\theta})^2 + \frac{dr}{d\theta} \ddot{\theta} \quad (1.34)$$

Poiché vale $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$, allora:

$$\ddot{\theta} = \frac{l}{2\mu} \left(-\frac{2\dot{r}}{r^3} \right) = -\frac{l\dot{r}}{r^3\mu} \quad (1.35)$$

Sostituendo l'espressione di $\dot{\theta}$ all'equazione del moto, (1.28):

$$\begin{aligned} \mu \ddot{r} &= \mu \frac{d^2r}{d\theta^2} \frac{l^2}{\mu^2 r^4} - \frac{dr}{d\theta} \frac{2l}{\mu r^3} \frac{l}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \\ &= \frac{d^2r}{d\theta^2} \frac{l^2}{\mu r^4} - \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{2l^2}{\mu r^5} = F_r + \frac{l^2}{\mu r^3} \end{aligned} \quad (1.36)$$

E' possibile, dunque, scrivere:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r + F_r \frac{\mu r^4}{l^2} \quad (1.37)$$

Per ricavare la forma dell'orbita tramite integrazione diretta della quantità $\theta(r)$ si procede con un cambio di variabili:

$$s = \frac{1}{r} \quad \text{da cui} \quad ds = -\frac{1}{r^2} dr \quad (1.38)$$

Si sostituisce alla (1.37) per ottenere:

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l^2 s^2} F \left(\frac{1}{s} \right) \quad (1.39)$$

L'equazione trovata è generale, non specifica l'espressione della forza. E' valida, perciò, per ogni forza centrale. Specificando la forma della F_r è possibile procedere con la determinazione esplicita delle orbite.

L'equazione del secondo ordine, (1.37), può essere ridotta ad un'equazione del primo ordine con lo scopo di ricavare, integrando, la forma dell'orbita. Per effettuare ciò si utilizza la conservazione dell'energia, ricordando la (1.30). Infatti:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{eff} \\ &= \frac{l^2}{2\mu r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + U_{eff} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Da cui, trattando E come una costante, si può isolare $d\theta$ e integrare nell'intervallo $[\theta_0, \theta(r)]$, con $\theta_0 = \theta(r(0))$:

$$d\theta = \pm \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{eff}}} \quad (1.41)$$

Per integrazione si ottiene:

$$\theta - \theta_0 = \int_{r(\theta_0)}^{r(\theta)} \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{eff})}} dr \quad (1.42)$$

L'integrazione, in ogni caso, conduce all'espressione analitica di $\theta(r)$ e non direttamente a quella dell'orbita. Tuttavia, questa può essere ricavata attraverso una inversione, $r(\theta)$.

Capitolo 2

Problema di Keplero

2.1 Forma delle orbite

Per procedere con la descrizione del problema dei due corpi è necessario introdurre l'espressione della forza che entra in gioco. Nel caso considerato, si tratta della forza gravitazionale tra i due punti materiali. Il problema viene così specificato e la trattazione prende il nome di problema di Keplero perché conduce alla determinazione delle orbite tipiche dei pianeti. Se si sostituisce:

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \quad (2.1)$$

dove $k = Gm_1m_2$ contiene termini costanti, in (1.39) si ottiene la relativa equazione del moto:

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = -\frac{\mu}{l^2s^2}F\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\mu k}{l^2} \quad (2.2)$$

Sostituendo anche a (1.29):

$$U_{eff} = \frac{l^2s^2}{2\mu} + U(s) = \frac{l^2s^2}{2\mu} - ks \quad (2.3)$$

si ricava l'espressione del potenziale efficace in caso di forza gravitazionale. Sostituendo a sua volta (2.3) all'equazione (1.42), si ha:

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= - \int_{s(\theta_0)}^{s(\theta)} \frac{l}{\mu \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{l^2s^2}{2\mu} + ks \right)}} ds \\ &= - \int_{s(\theta_0)}^{s(\theta)} \frac{l}{\mu \sqrt{\frac{2}{\mu} E - \frac{l^2s^2}{\mu^2} + \frac{2ks}{\mu}}} ds \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'integrale risultante è del tipo:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{a + bs + cs^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left(\frac{-b - 2cs}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) \quad (2.5)$$

In particolare, in questo caso i parametri a, b, c valgono:

$$\begin{cases} a = \frac{2E\mu}{l^2} \\ b = \frac{2k\mu}{l^2} \\ c = -1 \end{cases} \quad (2.6)$$

La primitiva dell'integrale (2.4) è, perciò:

$$\theta - \theta_0 = \arccos \frac{\left(-\frac{2k\mu}{l^2} + 2s \right)}{\sqrt{\frac{4k^2\mu^2}{l^4} + \frac{8E\mu}{l^2}}} \quad (2.7)$$

Invertendo la funzione si ottiene:

$$s(\theta) = \frac{k\mu}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\mu c^2}{k^2} E \cos(\theta - \theta_0)} \right) \quad (2.8)$$

La (2.8) rappresenta l'equazione di una conica in funzione della variabile s . Esplicitando la dipendenza da r si ottiene la forma generica di una conica in coordinate polari:

$$\frac{1}{r(\theta)} = s(\theta) = C[1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)] \quad (2.9)$$

da cui :

$$r(\theta) = \frac{1}{C[1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)]} \quad (2.10)$$

Il parametro ϵ prende il nome di eccentricità e viene definito come:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2}{\mu k^2} E} \quad (2.11)$$

Questa quantità, come si evince da (2.11) è positiva per definizione. A seconda del valore che assume ϵ la conica assume una forma precisa. La tabella riportata, Tab.(2.1), descrive i quattro casi possibili.

ϵ	E	orbita
$\epsilon > 1$	$E > 0$	iperbole
$\epsilon = 1$	$E = 0$	parabola
$\epsilon < 1$	$E < 0$	ellisse
$\epsilon = 0$	$E = U_{eff}(\hat{r})$	circonferenza

Tabella 2.1: Forme delle orbite corrispondenti ai valori di ϵ e di E .

Da queste considerazioni discende la prima legge di Keplero, per cui *Le traiettorie dei pianeti sono ellissi, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi*. Il caso di orbita ellittica corrisponde, infatti, a caso di orbita legata, con $E < 0$, caso relativo al problema di Keplero. A tale conclusione è possibile giungere anche dallo studio dell'andamento del potenziale efficace in funzione del raggio r . Il grafico, Fig.(2.1), di U_{eff} prevede un minimo. Tale punto di minimo corrisponde a un equilibrio stabile del sistema. Procedendo con un'analisi qualitativa delle orbite dal grafico (2.1) si tracciano quattro rette orizzontali corrispondenti ai quattro valori di energia: $E > 0, E = 0, E < 0, E = U_{eff}(\hat{r})$. E' il valore dell'energia a determinare perciò la forma dell'orbita, fissando il parametro eccentricità, come risulta dalla equazione (2.11). Per orbite kepleriane il valore dell'energia totale è negativo, corrispondono a uno stato legato, e pertanto l'orbita prevista è ellittica. Una particolare attenzione può in ogni caso essere posta sulle orbite circolari, $E = U_{eff}(\hat{r})$.

2.2 Orbite circolari

Un interessante effetto è il caso di perturbazione di orbita circolare nel caso di potenziale gravitazionale. Tale orbita, come già specificato, corrisponde a un raggio $r = \hat{r}$ tale da minimizzare il potenziale efficace, Fig(2.1). E' possibile, perciò, determinare tale valore di minimo imponendo la derivata prima del potenziale, calcolata a questo valore di r , uguale a zero. Risulta:

$$\frac{dU_{eff}}{dr}(\hat{r}) = 0 \quad (2.12)$$

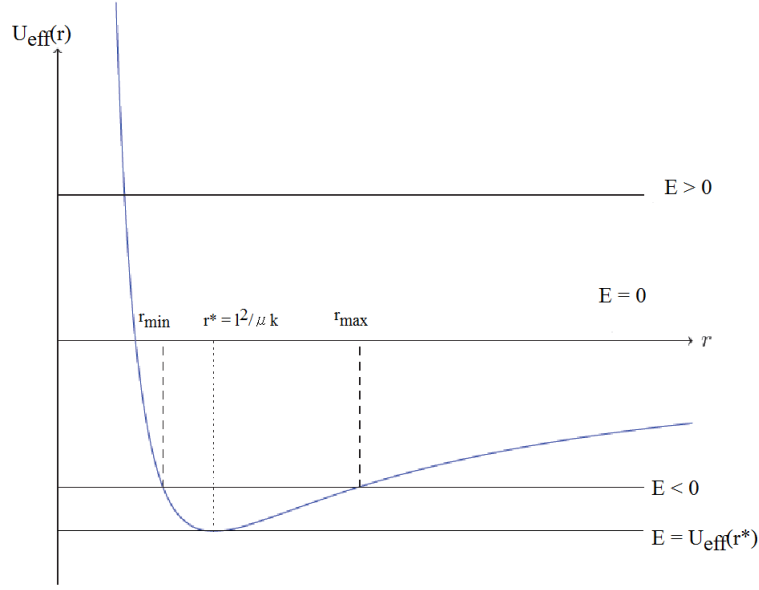


Figura 2.1: Andamento di U_{eff} nel caso di Forza gravitazionale. In questa rappresentazione $\hat{r} = r^*$

Sostituendo a (2.12) la forma del potenziale efficace, (1.29), si ricava il valore di \hat{r} che verifica la condizione di minimo. Si ha, cioè:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{eff}}{dr}(\hat{r}) &= \frac{k}{\hat{r}^2} - \frac{l^2}{\hat{r}^3 \mu} \\ &= k - \frac{l^2}{\hat{r}} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Da cui, ricavando \hat{r} :

$$\hat{r} = \frac{l^2}{\mu k} \quad (2.14)$$

Per l'orbita circolare questo valore di raggio rimane costante nel tempo, così da poter calcolare l'andamento di θ in funzione del tempo. In particolare, ricordando l'espressione di l , (1.25), si ottiene:

$$l(r) = l(\hat{r}) = \mu \hat{r}^2 \dot{\theta} = cost \quad (2.15)$$

Da (2.15), isolando $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu \hat{r}^2} = cost \quad (2.16)$$

L'equazione differenziale (2.16) è a variabili separabili. Risolvendo, si ottiene la legge oraria per θ :

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{l}{\mu \hat{r}^2} t \quad (2.17)$$

L'equazione per θ è, quindi, un'equazione lineare nel caso di orbita circolare.

Si consideri ora una piccola perturbazione dell'orbita circolare. Questa situazione è descritta da una perturbazione del raggio, non più costante, ma che varia nel tempo a causa del termine di perturbazione $\eta(t)$. Si ha, cioè:

$$r(t) = \hat{r} + \eta(t) \quad (2.18)$$

dove $|\frac{\eta}{\hat{r}}| \ll 1$. E' possibile determinare l'evoluzione di η attraverso la teoria delle piccole oscillazioni, la quale prevede una generica scrittura della lagrangiana come:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} A(q)(\dot{q}, \dot{q}) - \frac{1}{2} H_u(q^*)(q, q) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{\eta}^2 - \frac{1}{2} U''_{eff}(\hat{r}) \eta^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

dove A è la matrice cinetica e H_u è l'Hessiana, sostituita con la derivata seconda del potenziale efficace. La lagrangiana trovata in (2.19) è quella di un oscillatore armonico nella variabile η che descrive la perturbazione. La frequenza ω di oscillazione è:

$$\omega^2 = \frac{U''_{eff}(\hat{r})}{A(\hat{r})} = \frac{U''_{eff}(\hat{r})}{\mu} > 0 \quad (2.20)$$

Dove il segno di ω è positivo perché \hat{r} è minimo di U_{eff} .

Si vuole descrivere l'effetto della perturbazione non in termini di variazione temporale, $\eta(t)$, ma in termini di perturbazione della forma dell'orbita, si cerca cioè $\eta(\theta)$. Si procede considerando l'equazione differenziale del secondo ordine espressa in (1.37). Si vuole, in particolare, ricondurre la (1.37) al primo ordine, così da poter successivamente linearizzare anche il sistema perturbato, $r = \hat{r} + \eta(\theta)$. Si consideri, perciò, la (1.37), questa ammette soluzione per $r = \hat{r}$ se vale:

$$\mu \frac{\hat{r}^4}{l^2} F(\hat{r}) + \hat{r} = 0 \quad (2.21)$$

da cui si ricava la forma della forza valutata nel punto di equilibrio \hat{r} :

$$F(\hat{r}) = -\frac{l^2}{\mu \hat{r}^3} \quad (2.22)$$

Portando la (1.37) al primo ordine si ha:

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = v = f(r, v) \\ \frac{dv}{d\theta} = \mu \frac{r^4}{l^2} F(r) + r + \frac{2}{r} v^2 = g(r, v) \end{cases} \quad (2.23)$$

Si procede linearizzando il sistema perturbato. Ricordando che per linearizzare un sistema del tipo:

$$x' = f(x) \quad (2.24)$$

con x generico vettore di \mathbb{R}^n , si sostituisce la sua parte lineare e si ottiene:

$$x' = f'(\hat{x})x \quad (2.25)$$

dove \hat{x} è il punto di equilibrio del sistema non lineare (2.24) e $f'(\hat{x})$ è la matrice Jacobiana valutata nell'equilibrio.

In particolare, nel caso considerato si ha che:

$$x = \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix} \quad ; \quad x' = \begin{pmatrix} \frac{d\eta}{d\theta} \\ \frac{dv}{d\theta} \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

e quindi la (2.25) diventa, sostituendo (2.23):

$$\begin{pmatrix} \frac{d\eta}{d\theta} \\ \frac{dv}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}_{(\hat{r}, 0)} \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{d\eta}{d\theta} \\ \frac{dv}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\partial g}{\partial r}(\hat{r}, 0)\eta \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Rimane da specificare l'espressione di $\frac{\partial g}{\partial r}(\hat{r}, 0)$. Dalla espressione di $g(r, v)$ definita in (2.23)

si ha, dunque:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\mu}{l^2} (4r^3 F(r) + r^4 F'(r)) + 1 - 4 \frac{v}{r^2} \quad (2.29)$$

Se si valuta (2.29) nel punto di equilibrio $(\hat{r}, 0)$ si ottiene:

$$\frac{\partial g}{\partial r}(\hat{r}, 0) = \frac{\mu}{l^2} \left[4\hat{r}^3 \left(-\frac{l^2}{\mu \hat{r}^3} \right) + \hat{r}^4 F'(\hat{r}) \right] + 1 = -3 + \frac{\mu}{l^2} \hat{r}^4 F'(\hat{r}) \quad (2.30)$$

Dalla (2.28) si ha che l'equazione del secondo ordine per η è:

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} = \frac{\partial g}{\partial r}(\hat{r}, 0) \eta = \left(\frac{\mu}{l^2} \hat{r}^4 F'(\hat{r}) - 3 \right) \eta \quad (2.31)$$

dove è stata sostituita (2.30). Si definisce infine il termine β^2 come:

$$\beta^2 = 3 - \left(\frac{\mu}{l^2} \hat{r}^4 F'(\hat{r}) \right) \quad (2.32)$$

Con (2.32) nella (2.31) si ha:

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} = -\beta^2 \eta \quad (2.33)$$

equazione di un' oscillatore armonico di frequenza β .

Si noti che non è stata esplicitata l'espressione della forza agente, $F(r)$. Questo perché l'espressione è stata ricavata sotto ipotesi di orbita circolare perturbata senza specificare quale tipo di potenziale agisse. La (2.33) è valida, pertanto, nel punto di equilibrio stabile di ogni potenziale centrale. Essendo, tuttavia, interessati al caso di forza gravitazionale, si ha che:

$$F'(\hat{r}) = \frac{2k}{\hat{r}^3} \quad (2.34)$$

Linearizzato il sistema perturbato, si ricava la soluzione dell'equazione differenziale (2.33), che descrive la perturbazione della forma dell'orbita:

$$\eta(\theta) = \hat{\eta} \cos[\beta(\theta - \delta_0)] \quad (2.35)$$

dove $\hat{\eta}$ e δ_0 sono determinati dalle condizioni iniziali. La forma delle perturbazioni è, quindi, una funzione oscillante che assume valore massimo e minimo. La Fig.(2.2) mostra l'andamento di $r = \hat{r} + \eta$.

Dalla (2.35) si ha che vale $\eta(t) = \hat{\eta}$ quando:

$$\beta(\theta - \delta_0) = 2\pi n \quad (2.36)$$

Quindi gli n valori di θ che soddisfano la (2.36) sono :

$$\theta_n = \delta_0 + \frac{2\pi n}{\beta} \quad (2.37)$$

E' possibile indicare con r_{max} ed r_{min} , valore massimo e il valore minimo che r può assumere a causa della perturbazione. Questi valori, rappresentati anche in Fig.(2.2), sono:

$$r_{max} = \hat{r} + \hat{\eta} \quad (2.38)$$

$$r_{min} = \hat{r} - \hat{\eta} \quad (2.39)$$

r_{max} e r_{min} prendono rispettivamente il nome di apoapside e periapside. Si noti come la successione dei valori di θ che soddisfano (2.37) sia caratterizzata da una ragione algebrica che dipende da β . Infatti, il valore n -esimo e quello $n+1$ -esimo sono distanti di una quantità pari a:

$$\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.40)$$

E' possibile distinguere due casi a seconda del valore di β . Si ha, infatti, dalla (2.40):

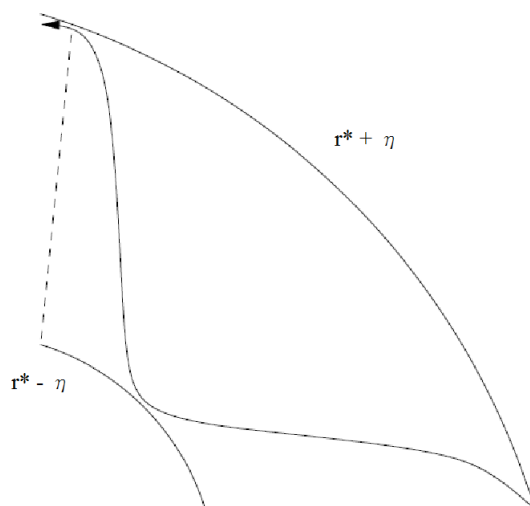


Figura 2.2: Andamento di $r = \eta + r^*$. Dove $r^* = \hat{r}$.

- $\beta > 1 \rightarrow \Delta\theta < 2\pi$
- $\beta < 1 \rightarrow \Delta\theta > 2\pi$

Un'altra proprietà di β si evince dalla (2.35). Infatti, si ha che se β è un numero razionale, esprimibile come rapporto tra due numeri interi $\frac{p}{q}$, allora dopo q rivoluzioni il raggio vettore \mathbf{r} , tornerà a percorrere l'orbita precedente. In altre parole, ad ogni rivoluzione l'orbita si chiude, coincide, cioè, con l'orbita descritta nella rivoluzione precedente. La Fig.(2.3) mostra il caso di orbita circolare perturbata, caratterizzata da un valore di β razionale. E' evidente, infatti, dalla Fig.(2.3) come l'orbita perturbata sia chiusa.

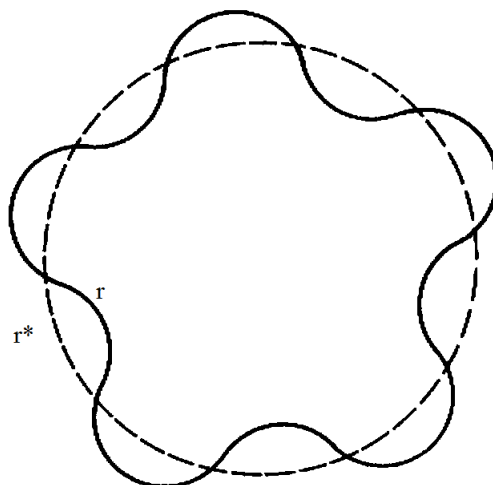


Figura 2.3: Esempio di perturbazione di orbita circolare con $\beta = \frac{p}{q}$, con p e q interi.

2.3 Forma del potenziale associato ad un'orbita conica che precede

Nel paragrafo (2.1) si è determinata la forma dell'orbita una volta definita l'espressione della forza agente, o equivalentemente del potenziale. Si vuol ora trattare il caso inverso. Determinare la forma del potenziale risentito da un oggetto che percorre una traiettoria descritta da una generica conica, in particolare una conica che precede, $r(\theta)$. Nello specifico si vuole dimostrare che partendo da un'orbita chiusa con $0 \leq \epsilon < 1$ la forma del potenziale è:

$$U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2} + U_\infty \quad (2.41)$$

e ritrovare, così, come caso particolare, il caso kepleriano. Si consideri, perciò, l'espressione di una conica che precede:

$$r(\theta) = \frac{\hat{r}}{1 - \epsilon \cos(\beta\theta)} \quad (2.42)$$

dove il termine β indica la frequenza della perturbazione dell'orbita.

La (2.42) può essere riscritta in funzione della variabile $s = \frac{1}{r}$ e ottenere:

$$s(\theta) = s_0(1 - \epsilon \cos(\beta\theta)) \quad (2.43)$$

Sostituendo quest'ultima alla (1.39) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 s}{d\theta^2} + s &= \beta^2 s_0 \epsilon \cos(\beta\theta) + s \\ &= (1 - \beta^2)s + \beta^2 s_0 = -\frac{\mu}{l^2 s^2} F\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Si ricava dunque:

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{C}{r^3} \quad (2.45)$$

con:

$$\begin{cases} k = \beta^2 s_0 \frac{l^2}{\mu} \\ C = (\beta^2 - 1) \frac{l^2}{\mu} \end{cases} \quad (2.46)$$

Integrando l'espressione trovata di $F(r)$, (2.45), si ricava l'espressione del potenziale agente:

$$-\int F(r) = U(r) = -\frac{k}{r} + \frac{C}{2r^2} + U_\infty \quad (2.47)$$

con U_∞ costante di integrazione. Dalle espressioni di k e C , (2.46), se i valori sono noti, si possono ricavare r_0 e β :

$$\begin{cases} r_0 = \frac{l^2}{\mu k} + \frac{C}{k} \\ \beta = \sqrt{1 + \frac{\mu C}{l^2}} \end{cases} \quad (2.48)$$

Se $C = 0$ le espressioni di U , (2.47), e di r_0 , (2.48), sono quelle del caso kepleriano, come si voleva dimostrare.

2.4 Il vettore di Laplace-Runge-Lenz

Il vettore di Laplace-Runge-Lenz è un integrale primo del moto che fornisce un metodo alternativo per descrivere la forma dell'orbita, $r(\theta)$. Questo vettore è definito come:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mu k \mathbf{e}_r \quad (2.49)$$

Dove \mathbf{p} , momento, e \mathbf{l} , momento angolare sono:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mu \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{l} = \mu c \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (2.50)$$

Si procede ora col dimostrare che questo vettore è un integrale primo del sistema, cioè rimane costante nel tempo, lungo le soluzioni di (1.37):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} \times \mathbf{l} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\ &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{l} + \mathbf{p} \times \dot{\mathbf{l}} - \mu k \frac{r\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \\ &= -\frac{k\mathbf{r}}{r^3} \times (\mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) - \mu k \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \mu k \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2} \\ &= \mu k \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3} + \mu k \frac{\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r^3} - \mu k \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \mu k \frac{\dot{r}\mathbf{r}}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

dove è stata utilizzata la proprietà del prodotto vettore:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (2.52)$$

e la relazione:

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})' = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = (r^2)' = 2rr' \quad (2.53)$$

Dalla (2.51) consegue la costanza di \mathbf{A} .

Per definizione,(2.49), il vettore appartiene al piano del moto e punta verso il periapside.

La Fig.(2.4) mostra il vettore di Lenz calcolato in diversi punti dell'orbita.

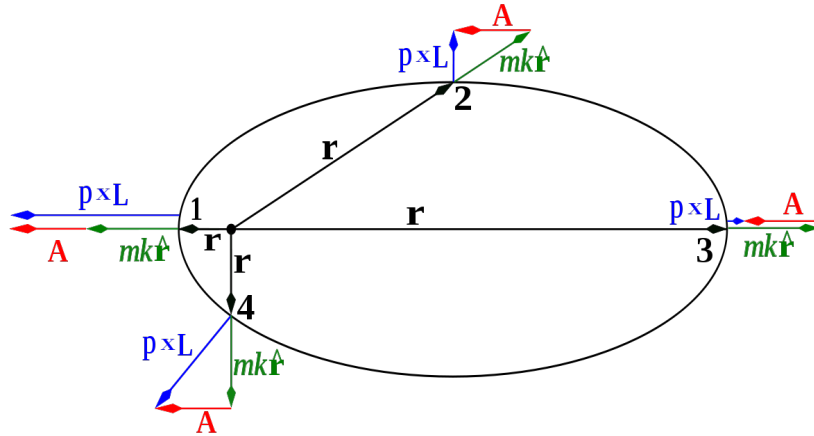


Figura 2.4: Vettore di Lenz \mathbf{A} calcolato in diversi punti dell'orbita.

Forma ed orientamento dell'orbita possono essere determinati a partire dal vettore di Lenz come segue. Eseguendo il prodotto scalare fra \mathbf{A} ed il vettore posizione \mathbf{r} si ottiene l'equazione:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = -Ar \cos(\theta - \theta_0) = l^2 - \mu kr \quad (2.54)$$

Ricavando $r(\theta)$, si ha:

$$r(\theta) = \frac{l^2}{\mu k - A \cos(\theta - \theta_0)} \quad (2.55)$$

Dal confronto della (2.55) con l'equazione generica di una conica (2.10) si ha che:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (2.56)$$

dove sono stati introdotti i parametri di eccentricità, ϵ , e di semiasse maggiore, a , definiti dalle:

$$\epsilon = \frac{A}{\mu k} \quad (2.57)$$

$$a(1 - \epsilon^2) = \frac{l^2}{\mu k} \quad (2.58)$$

Calcolando, invece, \mathbf{A}^2 , direttamente dalla definizione, (2.49), si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= (\mathbf{p} \times \mathbf{l})^2 - 2\mu k \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{l} + \mu^2 k^2 \\ &= p^2 l^2 - 2\mu l^2 \frac{k}{r} + \mu^2 k^2 \\ &= 2\mu l^2 \left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{k}{r} + \frac{\mu k^2}{2l^2} \right) \\ &= 2\mu l^2 \left(E + \frac{\mu k^2}{2l^2} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Richiamando (2.57) si calcola ϵ^2 , sostituendo \mathbf{A}^2 , (2.59):

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{1}{\mu^2 k^2} (2\mu l^2 E + \mu^2 k^2) \\ &= \frac{1}{k^2 \mu^2} \left[2\mu l^2 E \left(1 + \frac{\mu k^2}{2El^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dalla (2.60) calcolo:

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{2l^2 E}{\mu k^2} \quad (2.61)$$

Riprendendo la relazione per il semiasse maggiore, (2.58), si ha infine:

$$\frac{l^2}{\mu k} = a(\epsilon^2 - 1) = \frac{2l^2 E}{\mu k^2} a \quad (2.62)$$

da cui, ricavando a :

$$a = \frac{k}{2E} \quad (2.63)$$

Si è ottenuta una nuova descrizione della forma dell'orbita $r(\theta)$ in funzione dei parametri di eccentricità e semiasse maggiore, scrivibili in funzione della nuova variabile \mathbf{A} .

2.5 Periodo delle orbite Kepleriane chiuse

Avendo ricavato in (2.1) la prima legge di Keplero e in (1.2) la seconda, rimane da determinare la terza. La terza legge di Keplero mette in relazione il periodo orbitale del pianeta, τ , con il semiasse maggiore dell'orbita, a . Questa recita: *I quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.*

Per ricavare questa legge si sfrutta la presenza di un integrale primo, in particolare si utilizza la costanza del momento angolare l . Infatti, dalla definizione di l , (1.25):

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = 2\mu \dot{A} \quad (2.64)$$

si ricava:

$$l = 2\mu \frac{dA}{dt} \quad \text{da cui} \quad dt = \frac{2\mu dA}{l} \quad (2.65)$$

da cui, per integrazione su un periodo, si ottiene:

$$\tau = \frac{2\mu A}{l} \quad (2.66)$$

Ricordando che la generica espressione per l'area di una conica è data da $A = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}$ si sostituisce a (2.66) e si ottiene:

$$\tau = \frac{2\mu A}{l} = \frac{2\pi a^2 (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \mu}{l} \quad (2.67)$$

Ricordando, inoltre, che vale:

$$\frac{l^2}{\mu k} = \hat{r} = a(1 - \epsilon^2) \quad (2.68)$$

si ricava:

$$l = [\mu a k (1 - \epsilon^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.69)$$

e sostituendo alla (2.67) si ottiene:

$$\tau = \frac{2\pi a^2 (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} \mu}{[\mu a k (1 - \epsilon^2)]^{\frac{1}{2}}} = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \frac{\mu^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} = 2\pi \left(\frac{a^3 \mu}{k} \right) \quad (2.70)$$

Da cui, sostituendo i valori delle costanti $k = Gm_1 m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ e $M = m_1 + m_2$, si ottiene:

$$\tau = 2\pi \left(\frac{a^3}{GM} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.71)$$

Da cui:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (2.72)$$

La (2.72) è l'espressione matematica della proporzionalità tra periodo e semiasse maggiore, con costante di proporzionalità che vale $\frac{4\pi^2}{GM}$. Considerando la (2.72) nel caso di interazione tra un pianeta e il Sole, $m_1 = M_\odot$, $m_2 = m_p$ si ha:

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{G(M_\odot + m_p)}{4\pi^2} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m_p}{M_\odot} \right) \sim \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \quad (2.73)$$

dove vale sempre che $\frac{m_p}{M_\odot} \ll 1$, ad esempio per Giove è dell'ordine di 10^{-3} . La (2.73) è l'espressione analitica della terza legge di Keplero. Questa equazione mostra, infatti, come il rapporto tra τ^2 e a^3 sia costante per ogni pianeta del sistema solare, dipendendo solo dalla massa del Sole e non da quella del pianeta.

Capitolo 3

Missioni spaziali

Questo lavoro di tesi si propone di utilizzare la teoria del problema dei due corpi e concetti base di meccanica lagrangiana per discutere il funzionamento dei voli spaziali, in particolare di una possibile missione verso Nettuno.

3.1 Velocità di fuga

Uno dei concetti fondamentali per la descrizione di missioni spaziali è la velocità di fuga. Tale velocità, v_{esc} , è definita, nel modo più generale possibile, come la velocità che permette a una massa di prova m di allontanarsi indefinitamente da una sorgente di un campo gravitazionale. Si presentano, allora, due possibili traiettorie che l'elemento di prova può percorrere per potersi allontanare indefinitamente: una traiettoria rettilinea oppure un'orbita aperta. I due casi possono essere discussi in termini di momento angolare. Infatti, per il caso di traiettoria rettilinea si ha che $l = 0$, il moto viene detto collisionale. Per il caso di orbita aperta, invece, $l \neq 0$ e la forma orbitale può essere parabolica o iperbolica. Distinguendo i due casi si ricava la stessa espressione per la velocità di fuga.

Caso $l = 0$

Si consideri la massa di prova m posta inizialmente a una distanza R dalla massa sorgente, indicata con M . Poiché in questa casistica $l = 0$, il moto si svolge su una retta e la velocità dell'elemento di prova è diretta lungo la congiungente dei due oggetti. Dalla conservazione dell'energia, valutata tra l'istante iniziale e un istante generico, si ricava il modulo di v_{esc} . Infatti:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 + U(R) = \frac{1}{2}mv^2 + U(R+r) = E \quad (3.1)$$

dove la massa di prova ha come velocità iniziale proprio la velocità di fuga. Dalla forma del potenziale gravitazionale:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (3.2)$$

si ha, sostituendo alla (3.1):

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{(R+r)} \quad (3.3)$$

da cui:

$$v^2 = v_{esc}^2 - \frac{2GM}{R} + \frac{2GM}{(R+r)} = \frac{2}{m}E_i + \frac{2GM}{(R+r)} \quad (3.4)$$

Prendendo il limite di (3.4) per $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2}{m}E_i + \frac{2GM}{(R+r)} = \frac{2}{m}E_i \quad (3.5)$$

Dalla (3.5) consegue che $E_i \geq 0$. Se così non fosse, infatti, si troverebbe un valore di velocità tale da avere, a una distanza infinita, $v^2 < 0$. La minima energia per cui v_{esc} è sempre definita è, pertanto, $E_i = 0$. Da questa condizione si ricava:

$$v_{esc}^2 = \frac{2GM}{R} \quad \text{da cui} \quad |v_{esc}| = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (3.6)$$

Si noti come il valore della velocità di fuga non dipenda dalla massa di prova, ma solo dalla massa M e dalla distanza iniziale a cui m è posta, R .

Caso $l \neq 0$

In questo caso il moto si svolge su un piano e l'orbita descritta deve essere aperta, parabolica o iperbolica. Questa condizione sulla forma dell'orbita impone una condizione sul segno dell'energia della massa di prova. Ricordando, infatti, i risultati della Tab.(2.1), si ha che per avere un'orbita iperbolica deve valere $E > 0$, mentre per un'orbita parabolica $E = 0$. Dalla espressione dell'energia tramite le coordinate ridotte si ha che:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM}{r} \\ &= \frac{\mu}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove il termine v tiene conto delle componenti tangenziali e radiali di velocità. Imponendo l'uguaglianza a zero per l'energia, caso di orbita parabolica, e calcolando (3.7) a una distanza R dal centro di forza, dove $v = v_{esc}$, si ha:

$$\frac{\mu}{2}v_{esc}^2 - \frac{GMm}{R} = E = 0 \quad (3.8)$$

Da cui il modulo della velocità di fuga è:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (3.9)$$

Si noti come l'espressione ottenuta in questo caso coincida con quella ricavata in (3.6). Dalla definizione di v_{esc} , (3.9), è possibile determinare quanto vale la velocità di fuga per un oggetto che deve uscire dal campo gravitazionale terrestre. Ricordando, in particolare, che:

$$g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \quad (3.10)$$

è l'accelerazione sulla superficie terrestre si ha:

$$v_{esc,\oplus} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_E}} = \sqrt{2gR_{\oplus}} = \sqrt{2}v_{\oplus} \sim 11.2 \text{ km/s} \quad (3.11)$$

3.2 Missione su Nettuno

Il seguente paragrafo si propone di trattare più nel dettaglio il funzionamento di una missione spaziale. In particolare, si vogliono descrivere e confrontare le diverse metodologie con cui è possibile raggiungere un pianeta del sistema solare attraverso il lancio di una sonda. Il procedimento che verrà presentato sarà applicato a un volo spaziale su Nettuno, ma il principio di funzionamento è applicabile a tutte le missioni spaziali. Si presenteranno, nello specifico, due possibilità:

- *Trasferimento alla Hohmann*: Principio utilizzato per sistema Terra-Luna e Terra-Marte. Svantaggioso per lanci su pianeti esterni a causa di durate temporali della missione molto elevate.

- *Fionda gravitazionale, gravitational assist* : Tecnica che sfrutta l'attrazione gravitazionale di un pianeta intermedio per imprimere alla sonda una spinta aggiuntiva e permetterle di raggiungere il traguardo in un tempo minore e con un risparmio di carburante.

Di seguito vengono discussi entrambi i casi e vengono messi a confronto i risultati.

3.3 Trasferimento alla Hohmann

Questa tecnica fu ideata dall'ingegnere tedesco Walter Hohmann nel 1925 ed è utilizzata ancora oggi in alcune tipologie di volo spaziale. Hohmann studiò un metodo per permettere ad un oggetto di trasferirsi da un'orbita a maggiore energia specifica ad un'altra a minore attraverso una minima variazione di velocità al perigeo. L'immagine Fig.(3.1) rappresenta ciò che succede. Questo tipo di trasferimento di orbita prevede, come già specificato, che la

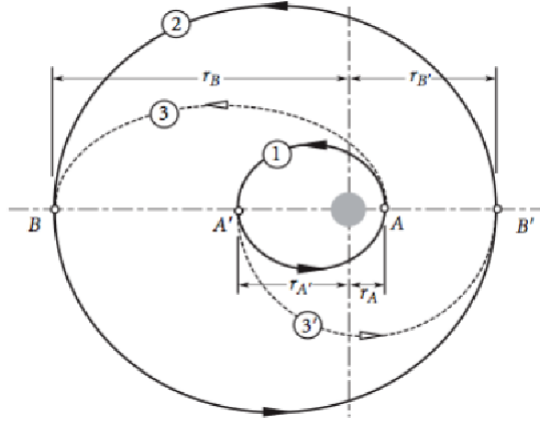


Figura 3.1: Principio Hohmann: cambiamento di orbita attraverso una variazione di velocità al perigeo.

sonda subisca una variazione di velocità. Per soddisfare questa condizione viene impresso alla sonda un impulso radiale, $\Delta \mathbf{p}$ al perigeo. Si cercano, perciò, le equazioni che descrivano l'orbita della sonda prima e dopo aver ricevuto tale impulso. Si noti, in primo luogo come una variazione di momento, equivalentemente di velocità, non provochi alcuna variazione in termini di momento angolare. Infatti:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{l} &= \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{p} \\ &= \mathbf{r} \times p_0 \mathbf{e}_r \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Questa invarianza, tuttavia, non vale per l'energia del satellite. La variazione di energia, provoca a sua volta una variazione di eccentricità orbitale. Infatti, dalla relazione tra energia ed eccentricità, (2.61), si ha:

$$\epsilon^2 = \frac{2l^2 E}{\mu k^2} + 1 \quad (3.13)$$

Se si indicano con ϵ_i ed ϵ_f i valori iniziali e finali di eccentricità si possono esprimere in funzione dei corrispondenti valori di energia iniziale e finale, E_i ed E_f , tramite la (3.13):

$$\begin{cases} \epsilon_f^2 = \frac{2l^2 E_f}{\mu k^2} + 1 \\ \epsilon_i^2 = \frac{2l^2 E_i}{\mu k^2} + 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\epsilon_f^2 = \epsilon_i^2 + \frac{2l\Delta E}{\mu k} = \epsilon_i^2 + \left(\frac{lp_0}{\mu k}\right)^2 \quad (3.15)$$

dove $\Delta E = \frac{p_0^2}{2\mu}$.

La variazione di eccentricità provoca, inoltre, una variazione dell'asse maggiore dell'orbita. In particolare, ciò è evidente dalla relazione (2.62):

$$a_f = \left(\frac{l^2}{\mu k}\right) \frac{1}{1 - \epsilon_f^2} \quad (3.16)$$

Valgono:

$$\begin{cases} a_i = \left(\frac{l^2}{\mu k}\right) \frac{1}{1 - \epsilon_i^2} \\ \epsilon_f^2 = \epsilon_i^2 + \left(\frac{lp_0}{\mu k}\right)^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Sostituendo alla (3.16) si ottiene l'espressione per il semiasse maggiore dopo l'impulso:

$$a_f = a_i \frac{1 - \epsilon_i^2}{1 - \epsilon_f^2} = \frac{a_i}{\left(\frac{1}{1 - \epsilon_i^2} - \frac{\epsilon_f^2}{1 - \epsilon_i^2}\right)} = \frac{a_i}{\left(\frac{1}{1 - \epsilon_i^2} - \frac{\epsilon_i^2}{1 - \epsilon_i^2} - \frac{a_i p_0^2}{\mu k}\right)} = \frac{a_i}{1 - \left(\frac{a_i p_0^2}{\mu k}\right)} \quad (3.18)$$

In funzione dei nuovi parametri orbitali, (3.15) e (3.18), si scrive la nuova forma dell'orbita, $r_f(\theta)$. L'orbita è una nuova ellisse kepleriana. Dalla (2.55), sostituendo, perciò, ϵ_f e a_f si ha:

$$r_f(\theta) = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1 - \epsilon_f(\cos(\theta + \delta))} \quad (3.19)$$

Da questa espressione risulta evidente come la quantità $\hat{r} = \frac{l^2}{\mu k}$ sia rimasta invariante, mentre abbia subito un cambiamento il parametro di eccentricità al denominatore. La presenza di una fase aggiuntiva nell'argomento del *coseno* è determinata dalla condizione sul perielio. Il valore dell'angolo di sfasamento δ deriva da una condizione di continuità: un istante prima e dopo l'impulso la posizione della sonda è calcolata allo stesso valore di $\theta = \pi$. Nel caso dell'orbita iniziale, tale valore, corrisponde alla posizione angolare del perigeo, mentre per l'orbita finale non è così. Nello specifico, è la posizione del perigeo spostata di una quantità angolare pari a δ . Matematicamente si ha:

$$r_i(\pi) = r_f(\pi) \quad (3.20)$$

$$\frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1 + \epsilon_i} = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1 + \epsilon_f \cos \delta} \quad (3.21)$$

da cui, si ricava δ :

$$\delta = \arccos \frac{1 + \epsilon_i}{1 + \epsilon_f} \quad (3.22)$$

La rappresentazione schematica di questo effetto è rappresentato in Fig.(3.2).

Ricavata la forma della traiettoria, si procede col calcolo della durata di una missione spaziale effettuata con un lancio di questo tipo. In particolare si calcola la durata della missione per una sonda che passa dall'orbita terrestre a quella di Nettuno. In questo caso si avrà, perciò, che $r_p = a_\oplus$ e $r_a = a_N$, rispettivamente i semiasse maggiori dell'orbita terrestre e di Nettuno. Ricordando che:

$$\begin{cases} r_p = a(1 - \epsilon) \\ r_a = a(1 + \epsilon) \end{cases} \quad (3.23)$$

si ricava:

$$\epsilon = \frac{a_N - a_\oplus}{a_N + a_\oplus} = 0.9356 \quad (3.24)$$

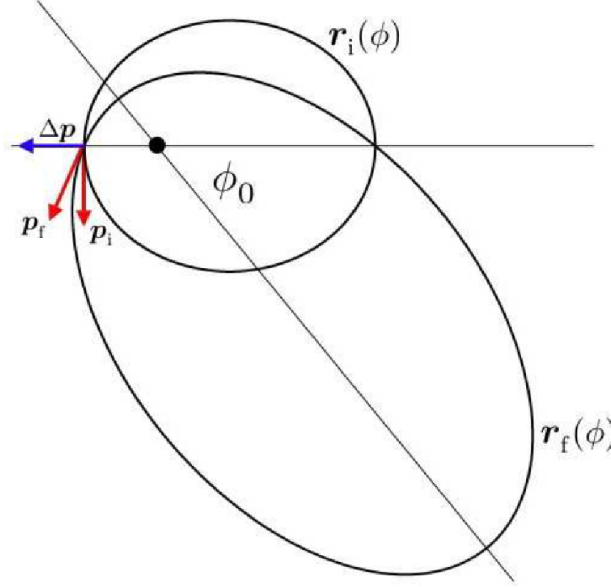


Figura 3.2: Esempio di variazione orbitale causata da un impulso radiale applicato al perigeo.

avendo sostituito i valori di $a_{\oplus} = 1UA$ e di $a_N = 30.06UA$.
Il semiasse maggiore di questa nuova orbita è, invece:

$$a = \frac{1}{2}(a_{\oplus} + a_N) = 15.53UA \quad (3.25)$$

Per ottenere informazioni sulla durata della missione si utilizza la terza legge di Keplero. Dalla questa, (2.73), è possibile ricavare τ periodo orbitale della sonda in questa nuova orbita in funzione del periodo orbitale terrestre, τ_{\oplus} :

$$\tau = \tau_{\oplus} \left(\frac{a}{a_{\oplus}} \right)^{\frac{3}{2}} = 30.6yr \quad (3.26)$$

Si conclude, quindi, che una spedizione diretta dalla Terra a Nettuno nel caso di trasferimento alla Hohmann richiederebbe un tempo pari a $\tau = 30.6yr$.

Considerazioni energetiche

Oltre alla durata del viaggio si è interessati, per motivi di costruzione, a quali sono i costi in termini di energia. Si assegni alla velocità assoluta della sonda un valore pari a $v_p^{(a)} = \lambda v_{\oplus}$, dopo che questa è uscita dal campo gravitazionale terrestre. La velocità della stessa, appena sopra l'atmosfera, viene indicata, invece, con v_0 . E' necessario, tuttavia, specificare che $v_p^{(a)}$, essendo la velocità della sonda nel sistema di riferimento del Sole, contiene il termine di trascinamento del sistema di riferimento terrestre. Per un lancio con la migliore efficienza, infatti, la sonda deve essere lanciata nella stessa direzione lungo cui si muove la Terra rispetto al Sole. Pertanto, dalla legge di composizione per le velocità tra diversi sistemi di riferimento inerziali, si ottiene il valore della velocità relativa della sonda, misurata, cioè, nel sistema di riferimento della Terra:

$$\mathbf{v}_p^{(r)} = \mathbf{v}_p^{(a)} - \mathbf{v}_{\oplus} \quad (3.27)$$

Dalla equazione di conservazione dell'energia nel sistema di riferimento terrestre, calcolata agli istanti in cui $v^{(r)} = v_0$ e $v_p^{(r)} = (\lambda - 1)v_{\oplus}$, si ha:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} = \frac{1}{2}m(v_p^{(r)})^2 = \frac{1}{2}m(\lambda - 1)^2v_{\oplus}^2 \quad (3.28)$$

L'equazione di conservazione contiene a primo membro i contributi di energia cinetica e potenziale della sonda al momento in cui essa si trova poco sopra l'atmosfera terrestre, ad un'altezza approssimabile col raggio della Terra, R_\oplus , mentre il secondo membro contiene solo il contributo di energia cinetica. Dalla (3.28) ricavo:

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 v_\oplus^2 \quad (3.29)$$

Isolando $\frac{v_0^2}{2}$:

$$\frac{v_0^2}{2} = v_\oplus^2 \left[\frac{(\lambda - 1)^2}{2} + \frac{GM_\oplus}{R_\oplus v_\oplus^2} \right] \quad (3.30)$$

Poiché $v_\oplus^2 = \frac{GM_\odot}{a_\oplus}$, sostituendo alla precedente si ha:

$$\frac{v_0^2}{2} = v_\oplus^2 \left[\frac{(\lambda - 1)^2}{2} + \frac{M_\oplus a_\oplus}{M_\odot R_\oplus} \right] = v_\oplus^2 \left[\frac{(\lambda - 1)^2}{2} + h \right] \quad (3.31)$$

dove $h = \frac{M_\oplus a_\oplus}{M_\odot R_\oplus}$. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\begin{cases} v_\oplus^2 = 6.24 \times 10^7 R_J / Kg \\ h = 7.050 \times 10^{-2} \end{cases} \quad (3.32)$$

E' utile introdurre il parametro di efficienza η . Questo è definito come rapporto tra l'energia totale E rispetto al sistema di riferimento terrestre e l'energia cinetica di trascinamento della sonda. Dalla definizione si scrive η come:

$$\eta \equiv \frac{2E}{mv_\oplus^2} = \frac{v_0^2}{v_\oplus^2} = (\lambda - 1)^2 + 2h \quad (3.33)$$

Si deriva la condizione su λ per avere un viaggio diretto su Nettuno. Si ha che:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{2a_N}{a_N + a_\oplus}} = 1.3913 \quad (3.34)$$

Si noti che il valore di λ relativo alla velocità che deve avere la sonda per sfuggire al campo gravitazionale del sistema solare era $\lambda = \sqrt{2} \sim 1,414$, come esprime (3.11).

3.4 Fionda gravitazionale

Il secondo metodo con cui è possibile effettuare un lancio su Nettuno è attraverso l'effetto fionda anche detto gravitational assist. Questo effetto sfrutta la presenza di una sorgente di campo gravitazionale che può fornire alla sonda un impulso tale da accelerarlo o decelerarlo. La sorgente, trattandosi di pianeti, nella maggior parte dei casi di Giove, non subisce una variazione percettibile di velocità nella sua orbita. Questa variazione, anche se può essere trascurata, deve avvenire anche per la sorgente per non violare la conservazione del momento. Perciò se la sonda viene accelerata il pianeta-sorgente decelera e viceversa. Si vedrà numericamente come la variazione di velocità per il pianeta sia infinitesima, quindi trascurabile.

Il metodo di fionda gravitazionale è molto usato nella dinamica spaziale e, in particolare, è stata sfruttata per la sonda Voyager2, lanciata il 20/08/77 verso Nettuno, ancora funzionante. L'idea è stata quella di sfruttare il pianeta Giove come sorgente di potenziale gravitazionale. La figura (3.3) schematizza quali sono le diverse fasi del volo.

Per descrivere nel dettaglio cosa succede e quali sono le diverse fasi del volo si divide il moto in tre diverse parti:

- Terra-Giove

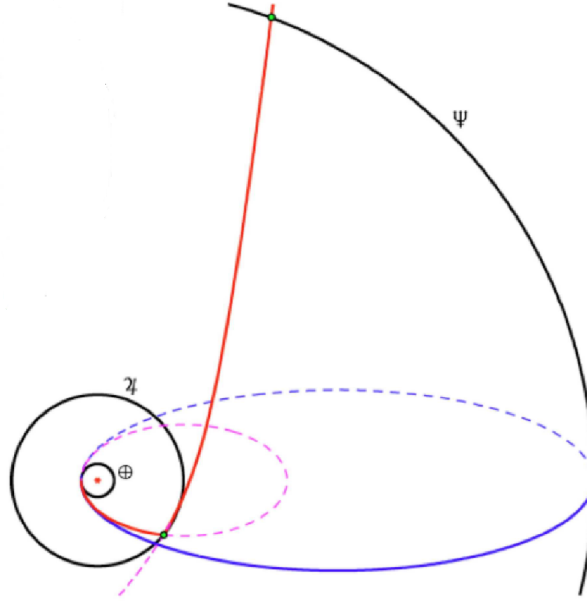


Figura 3.3: Rappresentazione delle orbite di Nettuno Giove e Terra. Sono rappresentate rispettivamente dall'esterno verso l'interno in nero. E' raffigurata , inoltre, l'orbita ellittica che la sonda percorre per arrivare in vicinanza a Giove (curva magenta). In seguito riceve l'impulso per raggiungere, tramite un'orbita aperta, Nettuno (curva rossa). Per confronto è mostrata anche, (curva blu), l'orbita nel caso di volo diretto su Nettuno.

- Impulso gravitazionale da parte di Giove
- Giove-Nettuno

Le formule utilizzate per la descrizione sono (2.10) e (2.11). In questo caso, inoltre, la massa ridotta del sistema $\mu = \frac{mM}{M+m} \sim m$ è approssimata alla massa della sonda, essendo $M \gg m$, dove M è la massa solare o massa gioviana. Prima di procedere con la descrizione analitica del problema si presenta una tabella di riferimento, Tab.(3.1), che contiene i valori di Massa, semiasse maggiore ed eccentricità per Terra, Giove e Nettuno. E' possibile così avere un riferimento numerico e capire gli ordini di grandezza dei calcoli proposti in seguito.

	Massa(Kg)	$a(UA)$	ϵ
<i>Terra</i>	5.972×10^{24}	1	0.0167
<i>Giove</i>	1.900×10^{27}	5.20	0.0484
<i>Nettuno</i>	1.024×10^{26}	30.06	0.0086

Tabella 3.1: Dati numerici di massa, semiasse maggiore ed eccentricità per Terra, Giove e Nettuno. Con $1UA = 1.496 \times 10^8 Km$

Si noti, facendo riferimento a Tab.(3.1) che per tutti e tre i pianeti i valori di eccentricità, ϵ , sono molto bassi. Non è errato, perciò, considerare, come si farà nei seguenti conti, le orbite dei pianeti come orbite circolari di raggio $r = a$. E' interessante notare, inoltre, come il valore di M_N sia superfluo in questa trattazione. Sarà necessario conoscere, invece $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$. Un ultimo parametro da specificare è il raggio di Giove, $R_J = 9.558 \times 10^{-4} UA$, questo valore individua il minimo periapside possibile per la sonda, se dovesse essere $r_p < R_J$ questa colliderebbe col pianeta.

Una nuova relazione da introdurre è quella che descrive il tempo, T , necessario alla sonda per passare da un angolo θ_1 a θ_2 lungo un'orbita conica:

$$T = \int dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{\mu}{l} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta r^2(\theta) = \frac{l^3}{\mu k^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{[1 - \epsilon \cos \theta]^2} \quad (3.35)$$

Definiti quali sono i parametri che descrivono le orbite dei pianeti coinvolti, è necessario definire i diversi sistemi di riferimento attraverso i quali verrà descritto il sistema. Nella prima fase della missione, traiettoria Terra-Giove, si studia il moto rispetto al sistema di riferimento del centro di massa del sistema sonda-Giove, che coincide con il sistema di riferimento di Giove. In questo sistema di riferimento inerziale l'interazione tra la sonda e Giove è elastica, si ha così una conservazione dell'energia cinetica della sonda prima e dopo aver subito lo scattering gravitazionale di Giove. Si ha, perciò, che nel sistema di riferimento di Giove, dalla condizione di urto elastico:

$$\frac{1}{2}mu_i^2 = \frac{1}{2}mu_f^2 \quad (3.36)$$

Da cui:

$$|\mathbf{u}_f| = |\mathbf{u}_i| \quad (3.37)$$

Nel secondo sistema di riferimento in cui si descrive il processo, il sistema del Sole, non vale l'uguaglianza in modulo delle velocità finale ed iniziale della sonda. Questo deriva, anche in questo caso dalla condizione di urto elastico tra sonda e Giove. Infatti, rispetto al Sole, vale la seguente legge di composizione delle velocità:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_f = \mathbf{u}_f + \mathbf{v}_J \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_J \end{cases} \quad (3.38)$$

dove $\mathbf{v}_{f,i}$ sono le velocità finale e iniziale della sonda nel sistema di riferimento del Sole e \mathbf{v}_J è la velocità di Giove rispetto al Sole. Per giungere al risultato espresso in (3.38) è stata fatta un'ulteriore ipotesi. Si può supporre, in buona approssimazione, che il vettore della velocità di Giove rispetto al Sole, \mathbf{v}_J , rimanga invariato durante l'interazione. Questa approssimazione è valida a causa della breve durata della interazione gravitazionale tra la sonda e Giove. I due interagiscono, infatti, su un tempo scala di circa qualche giorno, pertanto, la variazione di \mathbf{v}_J , avvenuta in questo breve intervallo di tempo, è trascurabile. Per capire come si dispongono geometricamente i vettori velocità nei diversi sistemi di riferimento si fa riferimento alla figura Fig.(3.4). Questa mostra come \mathbf{u}_f è quasi allineata con \mathbf{v}_J , così da sommarsi. Questo allineamento, come appare dalla figura, non si verifica per \mathbf{u}_i e \mathbf{v}_J .

Terra-Giove e interazione con Giove

Nella prima parte della missione la sonda percorre una traiettoria che connette l'orbita terrestre con quella di Giove. Si vuole ora descrivere questa prima parte del volo della sonda. Prima di procedere con la descrizione è necessario, tuttavia, dimostrare che l'orbita di Giove, durante l'interazione gravitazionale con la sonda, non subisce variazioni significative. Infatti, nelle considerazioni seguenti, si trascureranno gli effetti di deviazione dell'orbita gioviana rispetto a quelli subiti dalla sonda. Questa ipotesi è conseguenza della conservazione del momento nel sistema sonda-Giove. Infatti:

$$m\mathbf{v}_f + M_J\mathbf{v}_{J,f} = m\mathbf{v}_i + M_J\mathbf{v}_{J,i} \quad (3.39)$$

da cui:

$$\mathbf{v}_{J,f} - \mathbf{v}_{J,i} = \frac{m}{M_J}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_f) \quad (3.40)$$

Poiché $m \sim 10^3 Kg$ mentre $M_J \sim 10^{27} Kg$ il rapporto $\frac{m}{M_J} \sim 10^{-24}$. La variazione di velocità di Giove è, quindi, minima e può essere trascurata ai fini di questa trattazione. Gli effetti della fionda gravitazionale vengono intesi, perciò, solo nei confronti della sonda.

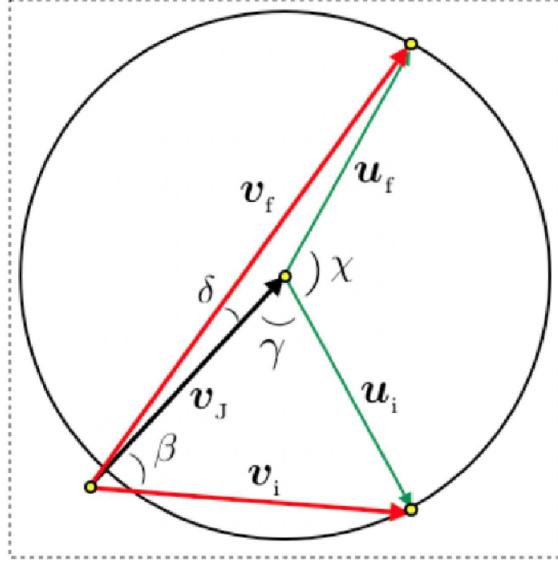


Figura 3.4: Rappresentazione vettoriale delle velocità della sonda nei diversi sistemi di riferimento. $\mathbf{u}_{f,i}$ nel sistema di riferimento di Giove e $\mathbf{v}_{f,i}$ nel sistema di riferimento del Sole.

Rispetto al sistema di riferimento del Sole, si attribuisce alla sonda una velocità al perielio di valore, $v_p = \lambda v_\oplus$, proporzionale alla velocità della Terra lungo la sua orbita e si calcola il modulo del momento angolare l :

$$l = \mu a_\oplus \cdot \lambda v_\oplus \quad (3.41)$$

e quindi, ricordando (2.58):

$$a(1 - \epsilon^2) = \hat{r} = \frac{l^2}{\mu k} = \frac{(\mu a_\oplus \cdot \lambda v_\oplus)^2}{\mu k} = \frac{(a_\oplus \lambda v_\oplus)^2}{GM_\odot} \quad (3.42)$$

dove è stata sostituita l'espressione di massa ridotta, μ .

Ricordando che è possibile, sotto l'approssimazione di orbita circolare per i pianeti, ricavare la relazione che lega raggio dell'orbita, a_i , con la velocità del pianeta v_i , dalla uguaglianza tra forza gravitazionale e forza centrifuga si ha:

$$\frac{GM_\odot}{a_i^2} = \frac{v_i^2}{a_i} \quad (3.43)$$

da cui si ricava:

$$a_i = \frac{GM_\odot}{v_i^2} \quad (3.44)$$

dove l'indice i indica un generico pianeta del sistema solare. Nel caso particolare della Terra, vale, perciò:

$$a_\oplus = \frac{GM_\odot}{v_\oplus^2} \quad (3.45)$$

Sostituendo (3.45) alla (3.42) si ha:

$$\hat{r} = \lambda^2 a_\oplus \quad (3.46)$$

Ricavata l'espressione per la costante \hat{r} , (3.46), è possibile ricavare le condizioni su periapside della nuova orbita. Si ricordi, che vale, dalla definizione di periapside:

$$r(\pi) = r_p = \frac{\hat{r}}{1 + \epsilon_I} \quad (3.47)$$

Come mostra la Fig.(3.3) l'orbita che deve avere la sonda per giungere in prossimità di Giove è tale che $r_p = a_{\oplus}$. Questa condizione si traduce, sostituendo in (3.47):

$$r(\pi) = \frac{\hat{r}}{1 + \epsilon_I} = a_{\oplus} \quad (3.48)$$

Sostituendo, allora, il valore di \hat{r} , fornito dalla (3.46), nella (3.48) si ha:

$$a_{\oplus} = \frac{\lambda^2 a_{\oplus}}{1 + \epsilon_I} \quad (3.49)$$

Da cui, isolando ϵ_I :

$$\epsilon_I = \lambda^2 - 1 \quad (3.50)$$

Come è stata imposta la condizione sul periapside, si può procedere per l'apoapside. La definizione di apoapside per una traiettoria conica è:

$$r_a = r(0) = \frac{\hat{r}}{1 - \epsilon_I} \quad (3.51)$$

Facendo riferimento alla Fig.(3.3) si impone che la condizione sull'apoapside per raggiungere Giove deve essere:

$$r_a \geq a_J \quad (3.52)$$

Questa condizione, infatti, garantisce che l'orbita della sonda intersechi quella di Giove. Questa condizione può essere riscritta, sostituendo (3.51), come:

$$r(0) = \frac{\hat{r}}{1 - \epsilon_I} \geq a_J \quad (3.53)$$

Sostituendo a quest'ultima (3.46) e (3.50) si ha:

$$r(0) = \frac{\lambda^2 a_{\oplus}}{2 - \lambda^2} \quad (3.54)$$

Risolvendo la disequazione per λ :

$$\lambda^2 a_{\oplus} \geq 2a_J - \lambda^2 a_J \quad (3.55)$$

$$\lambda^2 (a_{\oplus} + a_J) \geq 2a_J$$

$$\lambda^2 \geq \frac{2a_J}{a_J + a_{\oplus}}$$

Da cui si ricava la condizione su λ :

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{2a_J}{a_J + a_{\oplus}}} \sim 1.2952 \quad (3.56)$$

La disuguaglianza ricavata permette di individuare il valore minimo di velocità da attribuire alla sonda affinché raggiunga Giove. Se la disequazione è soddisfatta, allora l'intersezione con l'orbita di Giove avviene ad un angolo $\theta = \theta_J$:

$$r(\theta_J) = a_J = \frac{\lambda^2 a_{\oplus}}{1 - \cos \theta_J} \quad (3.57)$$

Da cui θ_J :

$$\theta_J = 2\pi - \arccos \left(\frac{a_J - \lambda^2 a_{\oplus}}{(\lambda^2 - 1)a_J} \right) \quad (3.58)$$

E' possibile, ora, ricavare il tempo necessario per percorrere questa porzione di traiettoria. Si utilizza la (3.35), integrando tra $[\pi, \theta_J]$, angolo di partenza dal perielio e angolo di intersezione con l'orbita di Giove. Si ha:

$$\tau_{EJ} = \frac{l^3}{\mu k^2} \int_{\pi}^{\theta_J} d\theta \frac{1}{[1 - \epsilon_I \cos \theta]^2} \quad (3.59)$$

Sostituendo (3.50) e (3.41) si ha:

$$\begin{aligned} \tau_{EJ} &= \frac{\mu^2 a_{\oplus}^3 \lambda^3 v_{\oplus}^3}{k^2} \int_{\pi}^{\theta_J} \frac{1}{[1 - (\lambda^2 - 1) \cos \theta]^2} \\ &= \frac{\mu G M_{\odot} v_{\oplus} \lambda^3}{k^2} \int_{\pi}^{\theta_J} d\theta \frac{1}{[1 - (\lambda^2 - 1) \cos \theta]^2} \\ &= \tau_{\oplus} \lambda^3 \int_{\pi}^{\theta_J} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{[1 - (\lambda^2 - 1) \cos \theta]^2} \end{aligned} \quad (3.60)$$

dove si sono utilizzate, inoltre, le relazioni per il semiasse maggiore terrestre, (3.45), e la definizione di τ_{\oplus} , periodo di rivoluzione della Terra:

$$\tau_{\oplus} = \frac{2\pi a_{\oplus}}{v_{\oplus}} \quad (3.61)$$

Incontro con Giove

La seconda parte della missione corrisponde all'incontro della sonda con l'orbita di Giove. Si vuole determinare la velocità finale della sonda, \mathbf{v}_f , e l'angolo δ che forma con la velocità assoluta di Giove, \mathbf{v}_J , dopo l'incontro con esso. In accordo con la Fig.(3.4), utilizzando la regola dei coseni :

$$v_f^2 = v_J^2 + u_f^2 - 2u_f v_J \cos(\chi + \gamma) \quad (3.62)$$

Attraverso la stessa regola si ha:

$$u_f^2 = v_J^2 + v_f^2 - 2v_J v_f \cos \delta \quad (3.63)$$

Da cui:

$$\cos \delta = \frac{v_J^2 + v_f^2 - u_f^2}{2v_J v_f} \quad (3.64)$$

La velocità assoluta di Giove, ricordando (3.44), può essere scritta come:

$$v_J^2 = \frac{GM_{\odot}}{a_J} = \frac{a_{\oplus}}{a_J} v_{\oplus}^2 \quad (3.65)$$

Utilizzando nuovamente la regola dei coseni, in riferimento a Fig.(3.4):

$$u_i^2 = v_J^2 + v_i^2 - 2v_J v_i \cos \beta \quad (3.66)$$

Un metodo alternativo per determinare v_i è attraverso la conservazione dell'energia della sonda:

$$\frac{1}{2} m (\lambda v_{\oplus})^2 - \frac{GM_{\odot} m}{a_{\oplus}} = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{GM_{\odot} m}{a_J} \quad (3.67)$$

da cui, isolando v_i^2 si ha :

$$v_i^2 = \left(\lambda^2 - 2 + \frac{2a_{\oplus}}{a_J} \right) v_{\oplus}^2 \quad (3.68)$$

E' necessario specificare un'altra equazione, quella relativa all'angolo β , tra la \mathbf{v}_i e la \mathbf{v}_J . Si utilizza, facendo nuovamente riferimento alla Fig.(3.4), la conservazione del momento:

$$\mu(v_i \cos \beta) a_J = \mu(\lambda v_{\oplus}) a_{\oplus} \quad (3.69)$$

Da cui si ottiene:

$$v_i \cos \beta = \lambda \frac{a_{\oplus}}{a_J} \quad (3.70)$$

Riferendosi alla Fig.(3.4) si introduce un'equazione per l'angolo γ . Geometricamente, infatti, si ha che:

$$v_J = v_i \cos \beta + u_i \cos \gamma \quad (3.71)$$

Mettendo a sistema queste relazioni (3.66), (3.68) e (3.71):

$$\begin{cases} v_i^2 = \left(\lambda^2 - 2 + \frac{2a_{\oplus}}{a_J} \right) v_{\oplus}^2 \\ u_i^2 = v_J^2 + v_i^2 - 2v_J v_i \cos \beta \\ v_J = v_i \cos \beta + u_i \cos \gamma \end{cases} \quad (3.72)$$

si ricavano:

$$\begin{cases} v_i = v_{\oplus} \sqrt{\lambda^2 - 2 + 2x} \\ u_i = v_{\oplus} \sqrt{\lambda^2 - 2 + 3x - 2\lambda x^{\frac{3}{2}}} \\ \cos \gamma = \frac{\sqrt{x} - \lambda x}{\sqrt{\lambda^2 - 2 + 3x - 2\lambda x^{\frac{3}{2}}}} \end{cases} \quad (3.73)$$

dove $x \equiv \frac{a_{\oplus}}{a_J} \sim 0.1923$.

Si osservi che le espressioni derivate in (3.73) dipendono da λ , i rimanenti fattori, v_{\oplus} ed x , sono parametri fissi. Indicato, perciò, il valore di λ , costante di proporzionalità tra la velocità della sonda e quella terrestre, rimangono univocamente determinati v_i , u_i e $\cos \gamma$. Ricavati quali sono i valori di velocità della sonda prima dell'incontro con Giove, si determina il destino della sonda una volta subito lo scattering gravitazionale da parte di Giove. Si è interessati, cioè, a ricavare u_f e v_f . Ponendosi nel sistema di riferimento gioviano si può scrivere che, ricordando la forma generica di un'orbita conica, (2.55) :

$$r(\theta) = \frac{a(\epsilon_J^2 - 1)}{1 + \epsilon_J \cos \theta} \quad (3.74)$$

Valendo, poi:

$$a(\epsilon_J^2 - 1) = a(\epsilon_J + 1)(\epsilon_J - 1) = r_p(\epsilon_J + 1) \quad (3.75)$$

dove l'ultima uguaglianza è valida per (3.48). Se si indica la posizione del perigeo r_p come:

$$r_p = r(0) = k R_J \quad (3.76)$$

si ha che la forma dell'orbita diventa:

$$r(\theta) = \frac{k R_J (1 + \epsilon_J)}{1 + \epsilon_J \cos \theta} \quad (3.77)$$

Dove k è una costante adimensionale che semplicemente permette di esprimere il valore del perigee in termini del raggio gioviano, R_J . Chiaramente si imporrà $k > 1$, per non avere uno scontro tra la sonda e la superficie del pianeta.

Per capire quale forma avrà l'orbita, se aperta o chiusa, è necessario considerare, in questo

sistema di riferimento, quali sono i diversi contributi di energia. In questo caso, l'unico contributo è quello di energia cinetica $E = \frac{1}{2}u_f^2 m > 0$. Il segno della energia della sonda, ricordando la trattazione generale del problema di Keplero condotta in (2.1), in particolare facendo riferimento alla Tab.(2.1), permette di determinare la forma dell'orbita descritta da essa. Perciò, poiché nel sistema di riferimento di Giove l'energia della sonda è solo cinetica essa sarà positiva per definizione e l'orbita della sonda sarà aperta, in particolare iperbolica. Nello specifico, è possibile scrivere che l'energia della sonda dopo lo scattering gravitazionale è:

$$E = \frac{1}{2}mu_f^2 = \frac{k}{2}(\epsilon_J^2 - 1)\frac{\mu k}{l^2} \quad (3.78)$$

Ricordando che valgono (2.58) e (3.76):

$$\frac{l^2}{\mu k} = a(\epsilon_J^2 - 1) = kR_J(1 + \epsilon_J) \quad (3.79)$$

si ottiene il valore del parametro ϵ di eccentricità per l'orbita iperbolica descritta dalla sonda nel sistema di riferimento di Giove, dopo l'interazione gravitazionale. Esso è:

$$\epsilon_J = 1 + k \left(\frac{R_J}{a_{\oplus}} \right) \left(\frac{M_{\odot}}{M_J} \right) \left(\frac{u_f}{v_{\oplus}} \right)^2 \quad (3.80)$$

La Fig.(3.5) mostra l'orbita percorsa dalla sonda una volta ricevuto l'impulso da Giove. Si noti che la trattazione è stata fatta nel sistema di riferimento di Giove e non su quello del Sole. La Fig.(3.6) mostra la traiettoria realmente percorsa da Voyager 2, mostrando anche in questo caso come la sua orbita si apra dopo l'interazione con Giove.

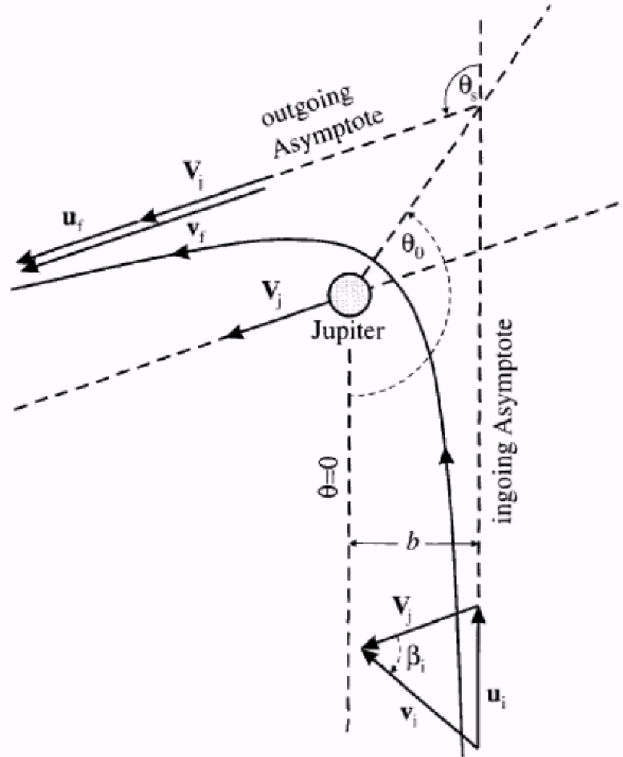


Figura 3.5: Traiettoria iperbolica della sonda dopo aver subito lo scattering gravitazionale da parte di Giove.

Un parametro che caratterizza l'iperbole è l'angolo di apertura, θ_c . Per un'iperbole generica questo è l'angolo formato dai due asintoti. Come indicato in Fig.(3.5), nel caso di orbita iperbolica, questa quantità indica l'angolo formatosi, nel sistema di riferimento di Giove, tra

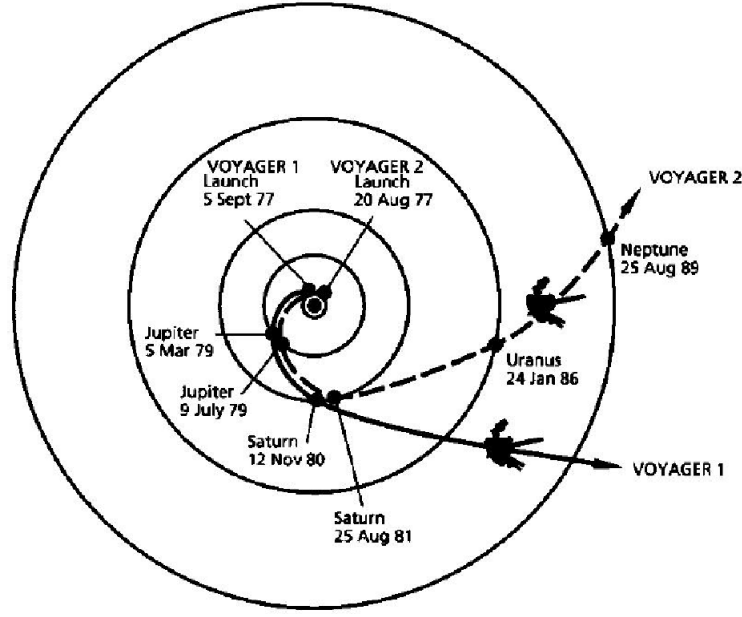


Figura 3.6: Traiettorie delle sonde Voyager 1 e Voyager 2.

le due componenti di velocità, iniziale e finale, u_i e u_f .

L'angolo di apertura dell'iperbole, per definizione, deve soddisfare la condizione:

$$\epsilon_J \cos \theta_c = 1 \quad (3.81)$$

$$\theta_c = \arccos \left(\frac{1}{\epsilon_J} \right) \quad (3.82)$$

Dalla (3.82) si determina il valore di χ , angolo supplementare a θ_c :

$$\chi = \pi - \theta_c = \pi - \arccos \left(\frac{1}{\epsilon_J} \right) \quad (3.83)$$

Si ricava, infine, attraverso la relazione dei coseni, la velocità finale della sonda nel sistema di riferimento del Sole, v_f , in funzione di χ e u_f . Riferendosi alla Fig.(3.4):

$$v_f^2 = v_J^2 + u_f^2 - 2u_f v_J \cos(\chi + \gamma) \quad (3.84)$$

Si sostituiscono alla (3.84) le relazioni ricavate per v_J e per χ , (3.71) e (3.83), per ottenere la relazione che descrive v_f :

$$v_f = \sqrt{xv_\oplus^2 + u_f^2 + 2u_f v_\oplus \sqrt{x} \cos(\theta_c - \gamma)} \quad (3.85)$$

Ricordando l'espressione per l'angolo δ , espressa dalla (3.64) si ha, indicando $x = \frac{a_\oplus}{a_J}$:

$$\cos \delta = \frac{xv_\oplus^2 + v_f^2 - u_f^2}{2v_f v_\oplus \sqrt{x}} \quad (3.86)$$

La descrizione del processo di scattering è passata dal sistema di riferimento di Giove a quello del Sole.

Giove-Nettuno

L'ultima parte della missione prevede l'incontro della sonda con l'orbita di Nettuno. Si vuole descrivere, perciò, come la sonda, percorrendo la nuova orbita, arrivi presso Nettuno. Come già specificato più volte, ciò che determina la forma della traiettoria della sonda è la sua energia, E . In particolare, nella configurazione presa ora in considerazione, l'energia della sonda poco dopo aver subito lo scattering da Giove vale, nel sistema di riferimento del Sole:

$$E = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_\odot m}{a_J} \quad (3.87)$$

Sempre in riferimento al sistema di riferimento del Sole il momento angolare l è per definizione:

$$l = \mu v_f a_J \cos \delta \quad (3.88)$$

Avendo ricavato le quantità E e l nel sistema di riferimento solare è possibile descrivere l'orbita che la sonda percorre rispetto a questo. Infatti, utilizzando la generica forma dell'orbita, (2.55), si ha:

$$r(\theta) = \frac{\hat{r}}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_J - \alpha)} \quad (3.89)$$

dove, ricordando (2.58) e sostituendo (3.88):

$$\hat{r} = \frac{l^2}{\mu k} = \left(\frac{v_f a_J \cos \delta}{v_\oplus a_\oplus} \right)^2 a_\oplus \quad (3.90)$$

Ricordando (2.11), relazione tra energia ed eccentricità orbitale:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{v_f^2}{v_\oplus^2} - \frac{2a_\oplus}{a_J} \right) \frac{\hat{r}}{a_\oplus}} \quad (3.91)$$

Anche in questo nuovo sistema di riferimento la forma dell'orbita rimane iperbolica. La sonda uscirà dal campo gravitazionale del Sole se:

$$v_f > v_\oplus \sqrt{2x} \quad (3.92)$$

Inoltre, la condizione per cui la sonda intersechi l'orbita di Giove, $\theta = \theta_J$, permette di ricavare la fase α , introdotta in (3.89). Si ha, dunque, dalla (3.92):

$$\cos \alpha = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\hat{r}}{a_J} - 1 \right) \quad (3.93)$$

L'intersezione con Nettuno si ha, invece, per:

$$a_N = \frac{\hat{r}}{1 + \epsilon \cos(\theta_N - \theta_J - \alpha)} \quad (3.94)$$

da cui:

$$\theta_N = \theta_J + \alpha + \arccos \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\hat{r}}{a_N} - 1 \right) \right] \quad (3.95)$$

Si calcola, infine, il tempo di percorrenza del tratto orbitale Giove-Nettuno. Tramite (3.35), si determina, cioè, il tempo che la sonda impiega a raggiungere Nettuno da Giove:

$$\tau_{JN} = \tau_E \left(\frac{\hat{r}}{a_\oplus} \right)^3 \int_{\theta_J}^{\theta_N} \frac{d\theta}{2\pi [1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_J - \alpha)]^2} \quad (3.96)$$

Terminata la descrizione di tutte e tre le parti della missione spaziale si calcola il tempo totale impiegato dalla sonda a concludere la missione. Considerando τ_{EJ} e τ_{JN} , date dalle (3.60) e (3.96):

$$\tau_{EN} = \tau_{EJ} + \tau_{JN} \quad (3.97)$$

Il valore τ_{EN} dipende da $v_p = \lambda v_\oplus$ e $k = GM_i m$. In Fig.(3.7) si plotta τ_{EN} in funzione di v_p per diversi valori di k . Dalla Fig.(3.7) si può osservare come l'andamento delle diverse curve, seppure sia differente per ogni valore di k , presenti un comportamento comune. Infatti, ogni curva è caratterizzata da alti valori di τ , corrispondenti a bassi valori di v_p . Tuttavia, a un certo valore λ^* si ha un cambiamento di pendenza. L'appiattimento delle funzioni avviene, perciò, al crescere dei valori di velocità impressa alla sonda. Non si ha un unico valore di λ^* che corrisponde al cambiamento di pendenza, ma è diverso per ogni pianeta, cioè per ogni k .

Si presentano, infine, per confronto, tempi di durata di missioni reali. La Tab.(3.8) presenta, infatti, relativamente ad ogni sonda lanciata, il periodo di durata del volo. Questi dati, seppur derivanti da calcoli certamente più specifici, in linea teorica seguono i ragionamenti proposti in questo paragrafo.

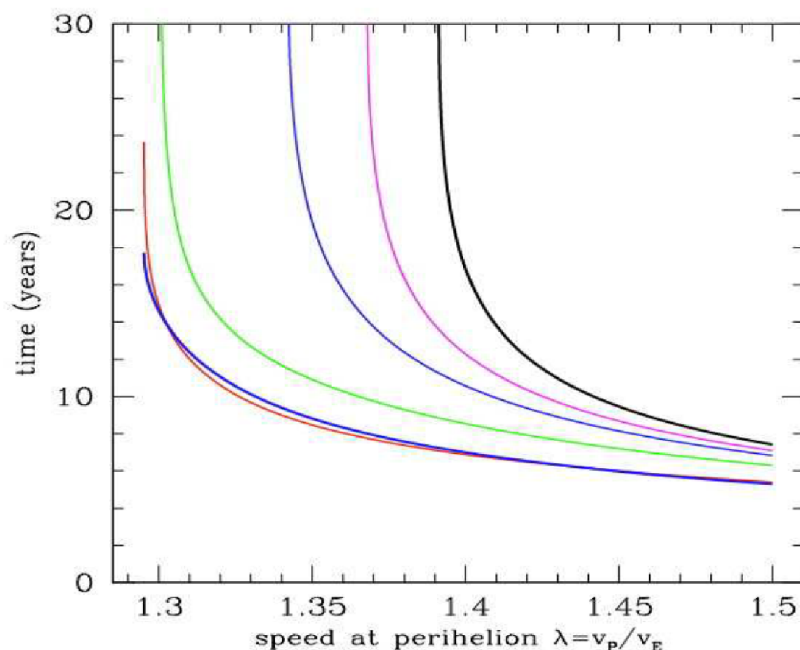


Figura 3.7: Tempo totale di percorrenza per compiere il tragitto Terra-Nettuno. Sei diversi grafici, corrispondono a sei diversi valori di k : $k = 1.0$ (blu spessa), $k = 5.0$ (rossa), $k = 20$ (verde), $k = 50$ (blu), $k = 100$ (magenta) e $k = \inf$ (nera spessa).

Probe's name	Launch date	Flyby	Flyby date	$\frac{\Delta v}{\text{km} \cdot \text{s}^{-1}}$	$\frac{\text{Altitude}}{\text{km}}$
Pioneer 10	02-03-1972	Jupiter	03-12-1973	+ 15,3	130 000
Pioneer 11	05-04-1973	Jupiter Saturn	02-12-1974 01-09-1979		43 000 21 000
Mariner 10	03-11-1973	Venus	05-02-1974	< 0	5 768
		Mercury 1	29-03-1974		703
		Mercury 2	21-09-1974		48 069
		Mercury 3	16-03-1975		327
Voyager 1	05-09-1977	Jupiter	05-03-1979	+ 16	277 500
		Saturn	12-11-1980		124 000
Voyager 2	20-08-1977	Jupiter	09-07-1979	+ 10	650 500
		Saturn	25-08-1981	+ 5	100 800
		Uranus	24-01-1986	+ 2	81 500
		Neptune	25-08-1989	- 3	5 000
Galileo	18-10-1989	Venus	10-02-1990		16 000
		Earth 1	08-12-1990		960
		Earth 2	08-12-1992		303
Ulysses	06-10-1990	Jupiter	08-02-1992		376 000
Cassini-Huygens	15-10-1997	Venus 1	26-04-1998	+ 3,7	337
		Venus 2	24-06-1999	+ 3,1	598
		Earth	18-08-1999	+ 4,1	1 166
		Jupiter	30-12-2000	+ 2,1	9 721 846
Messenger	03-08-2004	Earth	02-08-2005		2 348
		Venus 1	24-10-2006		2 987
		Venus 2	05-06-2007		338
		Mercury 1	14-01-2008		200
		Mercury 2	06-10-2008		200
		Mercury 3	29-09-2009		228
New Horizons	19-01-2006	Jupiter	28-02-2007	+ 3,8	2 300 000

Figura 3.8: Elenco completo di tutte le missioni spaziali che utilizzano il metodo gravitational assist. Δv indica la variazione di velocità del pianeta rispetto al Sole.

3.5 Approssimazioni

I calcoli proposti in questo lavoro di tesi per una missione verso Nettuno, possono essere applicati a lanci verso altri pianeti. Come già precisato, inoltre, i principi di funzionamento presentati nei paragrafi (3.3) e (3.4) vengono realmente utilizzati per le missioni spaziali moderne. Tuttavia, è bene ricordare che in questo studio sono state effettuate alcune approssimazioni importanti, che hanno permesso una trattazione semplificativa. Le approssimazioni considerate sono:

- Le orbite dei pianeti sono state considerate circolari, in particolare con raggio pari al semiasse maggiore dell'orbita. Ovvero:

$$\begin{cases} r_{\oplus}(t) = a_{\oplus} \\ r_J(t) = a_J \\ r_N(t) = a_N \end{cases} \quad (3.98)$$

- La velocità del pianeta lungo la sua orbita è considerata costante in modulo. Si ha infatti, dalla (3.44):

$$\begin{cases} v_{\oplus}^2 = \frac{GM_{\oplus}}{a_{\oplus}} \\ v_J^2 = \frac{GM_J}{a_J} \\ v_N^2 = \frac{GM_N}{a_N} \end{cases} \quad (3.99)$$

se i semiasse maggiori a_i delle orbite planetarie sono trattati come raggi di orbite circolari, si ha:

$$\begin{cases} v_{\oplus} = cost \\ v_J = cost \\ v_N = cost \end{cases} \quad (3.100)$$

- La velocità di Giove, durante l'interazione gravitazionale con la sonda, è ipotizzata costante anche in direzione. Come già specificato, ciò è dovuto alla brevità del tempo scala durante il quale i due oggetti interagiscono.
- Si trascurano le diverse inclinazioni delle orbite planetarie rispetto all'eclittica. Si propone, infatti, una trattazione bidimensionale, che avviene su un piano comune a tutti i pianeti, quello dell'eclittica.

Capitolo 4

Appendice

Si propone come conclusione del lavoro di tesi un altro calcolo relativo alle missioni spaziali. In particolare si vuole mettere a confronto l'efficienza di un lancio verso il Sole e di un lancio fuori dal sistema solare. Per il primo tipo di lancio si ha che dalla definizione di velocità di fuga, (3.9), nel caso di campo gravitazionale solare:

$$v_{esc,\odot} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}} \quad (4.1)$$

Volendo valutare l'efficienza di un lancio dalla Terra, questa velocità è stimata a una distanza pari ad a_E , distanza Terra-Sole. Ricordando che $v_{\oplus} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a_{\oplus}}} \sim 29.9 Km/s$ è la velocità della Terra nella sua orbita, si ha che sostituendo in (4.1):

$$v_{esc,\odot} = \sqrt{2}v_{\oplus} \quad (4.2)$$

Ci si propone di calcolare il lancio dalla Terra più efficiente, pertanto dovrà avvenire in direzione del moto terrestre così da avere una composizione di velocità vettoriali che si sommano col segno positivo. Infatti, se si indica con u la velocità della sonda rispetto al sistema di riferimento del Sole, si ha:

$$u = v_{esc,\odot} - v_{\oplus} = (\sqrt{2} - 1)v_{\oplus} \sim 12.4 \quad (4.3)$$

La sonda avrà una velocità rispetto al sole, che si indica con u , quando non risentirà più del potenziale gravitazionale della Terra, pertanto la conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{1}{2}m\tilde{u}^2 - \left(\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}\right) = \frac{1}{2}mu^2 \quad (4.4)$$

dove \tilde{u} è la velocità della sonda calcolata al limite dell'atmosfera terrestre. Si ricava:

$$\tilde{u}^2 = u^2 + v_{esc,\oplus}^2 \quad (4.5)$$

da cui:

$$\tilde{u} \sim 16.7 Km/s \quad (4.6)$$

Il secondo metodo con cui effettuare il lancio consiste nel far percorrere alla sonda un'orbita ellittica il cui perielio sia il raggio solare, $R_{\odot} \sim 6.68 \times 10^8 m$, e il cui afelio sia il semiasse maggiore dell'orbita terrestre, a_{\oplus} . In questo modo, come mostra la Fig.(4.1), la sonda, partendo dalla Terra arriva sul Sole.

La condizione su perielio e afelio si ricavano dalla generica forma di un'ellisse, (2.42), in particolare:

$$\begin{cases} r(\theta = \pi) = R_{\odot} = \frac{1}{1+\epsilon} \frac{l^2}{\mu k} \\ r(\theta = 0) = a_{\oplus} = \frac{1}{1-\epsilon} \frac{l^2}{\mu k} \end{cases} \quad (4.7)$$

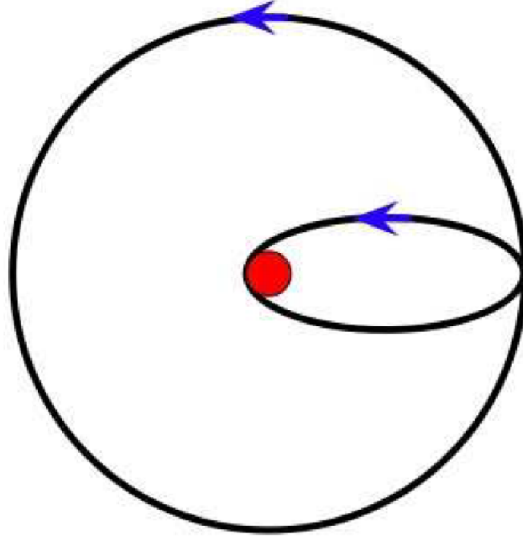


Figura 4.1: Rappresentazione schematica dell'orbita terrestre,più esterna,e dell'orbita ellittica che si vuol far percorrere alla sonda.

Poiché vale, in generale, $r_p = a(1 - \epsilon)$, nel caso particolare vale:

$$\begin{aligned}
 \epsilon &= \frac{a - r_p}{a} \\
 &= \frac{\frac{a_{\oplus} + R_{\odot}}{2} - R_{\odot}}{\frac{a_{\oplus} + R_{\odot}}{2}} \\
 &= \frac{a_{\oplus} - R_{\odot}}{a_{\oplus} + R_{\odot}} \sim 0.991
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

L'orbita è, quindi, molto eccentrica. Inoltre, dalla condizione su $\hat{r} = \frac{l^2}{\mu k}$ si ricava il valore della velocità relativa. Infatti:

$$\begin{cases} \frac{l^2}{\mu k} = \frac{a_{\oplus}^2 v^2}{G(M_{\odot} + m)} \sim a_{\oplus} \frac{v^2}{v_{\oplus}^2} \\ \frac{l^2}{\mu k} = (1 - \epsilon)a_{\oplus} = \frac{2a_{\oplus}R_{\odot}}{a_{\oplus} + R_{\odot}} \end{cases} \tag{4.9}$$

da cui si isola v^2 :

$$v^2 = \frac{2R_{\odot}}{a_{\oplus} + R_{\odot}} v_{\oplus}^2 \tag{4.10}$$

La velocità relativa u in questo caso sarà, in accordo con la legge di composizione delle velocità:

$$u = \left(\sqrt{\frac{2R_{\odot}}{a_{\oplus} + R_{\odot}}} - 1 \right) v_{\oplus} \sim -0.904 v_{\oplus} \tag{4.11}$$

Per un valore di $u = -27Km/s$ si ha che:

$$\tilde{u}^2 = u^2 + v_{esc,\oplus}^2 \rightarrow \tilde{u} = -29.9Km/s \quad (4.12)$$

Trovate i valori per le velocità relative della sonda in entrambi i casi si conclude che sarebbe più vantaggioso ,in termini di energia, spedire la sonda direttamente fuori dal sistema solare. In particolare questa conclusione è determinata dal rapporto tra i quadrati delle velocità relative, equivalentemente tra energie cinetiche. Si ha cioè:

$$\frac{\tilde{u}_I^2}{\tilde{u}_{II}^2} = 0.37 \quad (4.13)$$

Bibliografia

- [1] D.Arovass, Lecture notes *Lecture notes on classical mechanics*, Department of Physics University of California, San Diego, May 8, 2013.
- [2] M.Favretti Lecture notes, *Note per il corso di meccanica analitica*, (2014).
- [3] T.Franc, *The gravitational assist*, Astronomical Institute of Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Charles University in Prague, WDS'11 Proceedings of Contributed Papers, Part III, 55-60, 2011.
- [4] H.Goldstein (Columbia University), C.Poole (University of South Carolina), J.Safko (University of South Carolina), *Classical Mechanics*, third edition.
- [5] R.C.Johnson, *The slingshot effect*, Department of Mathematical Sciences, University of Durham, Durham DH1 3LE, England, 2003.
- [6] A.M.Nobili, Lecture notes *Elementi di meccanica celeste*, a.a 2011/2012.
- [7] F.Romano, Lecture notes *Relazione di dinamica del volo*, Corso di laurea in Ingegneria Aerospaziale, Università degli studi di Padova.
- [8] J.A.Van Allen, *Gravitational assist in celestial mechanics-a tutorial*, Department of Physics and Astronomy, University of Iowa, Iowa City, Iowa 52242-1479.